

УДК 519.62

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕТОЧНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*Кривовичев Г.В.*

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассмотрена задача об исследовании устойчивости конечноразностных решеточных кинетических схем Больцмана, предназначенных для расчета плоских течений вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости. Исследуется устойчивость в случае двух стационарных режимов течения в неограниченной области. Анализ устойчивости по начальным условиям производится с помощью метода Неймана на основе линейного приближения. Построены и исследованы области устойчивости в пространстве входных параметров. Показано, что все рассмотренные схемы являются условно устойчивыми. Установлено, что в широком диапазоне изменения входных параметров наибольшее число точек содержат области устойчивости, соответствующие схеме с направленными разностями, аппроксимирующей с первым порядком.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** вязкая жидкость, плоские течения, конечноразностные методы, решеточные кинетические схемы Больцмана, устойчивость.

## АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ГРАТКОВИХ КІНЕТИЧНИХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЛОСКИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

*Кривовічев Г.В.*

Розглянуто задачу про дослідження стійкості скінченорізницевиx граткових кінетичних схем Больцмана, призначених для розрахунку плоских течій в'язкої нестисливої нетеплопровідної рідини. Досліджується стійкість у випадку двох стаціонарних режимів течії в необмеженій області. Аналіз стійкості за початковими умовами проводиться за допомогою методу Неймана на основі лінійного наближення. Побудовано та досліджено області стійкості в просторі вхідних параметрів. Показано, що всі розглянуті схеми є умовно стійкими. Встановлено, що в широкому діапазоні зміни вхідних параметрів найбільше число точок містять області стійкості, які відповідні схемі зі спрямованими різницями, яка є апроксимуючою з першим порядком.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** в'язка рідина, плоскі течії, скінченорізницеві методи, граткові кінетичні схеми Больцмана, стійкість.

## STABILITY ANALYSIS OF LATTICE BOLTZMANN KINETIC SCHEME FOR CALCULATION OF PLANE FLOWS OF VISCOUS LIQUIDS

*Kryvovichev G.V.*

The stability problem for finite difference lattice Boltzmann kinetic schemes designed for calculation of plane flows of viscous incompressible nonconducting liquid is considered. The stability of the two cases of stationary flow regimes in an unbounded domain is studied. Stability analysis on the initial conditions is performed using the Neumann method based on the linear approximation. The stability region in the space of input parameters is constructed and investigated. It is shown that all the studied schemes are conditionally stable. It was found that in a wide range of input parameters the greatest number of points are contained in those domains of stability which correspond to the appropriate scheme with directed differences that is the first order approximation.

**KEY WORDS:** viscous liquid, flat flow, finite difference methods, lattice Boltzmann kinetic schemes, stability.

**1. Введение.** В последние два десятилетия в вычислительной гидродинамике разработаны различные варианты кинетических схем для расчета однофазных и многофазных течений жидкости и газа [1–5]. Ключевой особенностью этого типа вычислительных схем является то, что они основаны на использовании кинетических уравнений (в том числе и дискретных), которым

удовлетворяют функции распределения. Располагая последними, можно вычислять такие макрохарактеристики, как скорость, плотность, температуру, компоненты вектора потока тепла и компоненты тензора напряжений (например, см. [6, с. 32–33]). Благодаря достаточно простым вычислительным алгоритмам и широким возможностям для распараллеливания, кинетичес-

кие схемы в последние годы стали использоваться в большом числе работ.

В методе решеточных уравнений Больцмана производится рассмотрение течения среды как динамики ансамбля псевдочастиц с заданными скоростями [2]. Область, в которой происходит течение, разбивается сеткой с ячейками определенной формы, что задает в ней т. н. решетку (lattice). За шаг по времени  $\delta t$  псевдочастицы переходят между узлами решетки. Одним из недостатков этого метода является постоянство значения числа Куранта для решеточного уравнения Больцмана (lattice Boltzmann equation). Число Куранта равно единице (связано с физическими предпосылками), что задает жесткую связь значений шагов по времени и пространственным переменным и влияет на устойчивость метода.

Для исправления этой ситуации в литературе были предложены т. н. конечно-разностные решеточные схемы Больцмана (finite-difference-based lattice Boltzmann schemes), которые позволяют варьировать значение шага по времени и таким образом влиять на устойчивость метода. Кроме того, конечно-разностные схемы позволяют использовать при расчетах неравномерные и адаптивные сетки.

Настоящая статья посвящена анализу устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана (англ. finite-difference-based lattice Boltzmann schemes), представленных в работах [6–9]. Исследование устойчивости проводится посредством анализа границ областей устойчивости в пространстве параметров.

**2. Конечно-разностные решеточные схемы Больцмана.** Рассматривается только плоский случай изотермического течения вязкой ньютоновской жидкости и только равномерная прямолинейная сетка, построенная с шагом 1 по декартовым координатам. В этом случае можно использовать набор скоростей модели D2Q9:  $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i, i=1, \dots, 9$ , где  $V=1/\delta t$ , а векторы  $\mathbf{v}_i$  задаются следующим образом:  $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_6 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_7 = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_8 = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_9 = (1, -1)$ .

Наиболее часто встречающаяся в литературе кинетическая схема (т. н. решеточное уравнение Больцмана), основанная на модели D2Q9, имеет следующий вид [2]:

$$F_i(t_j + \delta t, \mathbf{R}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) = F_i(t_j, \mathbf{R}_{kl}) - \frac{1}{\tau} (F_i(t_j, \mathbf{R}_{kl}) - F_i^{(eq)}(\mathbf{F}(t_j, \mathbf{R}_{kl}))) \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}_{kl} = (X_k, Y_l)$  – радиус-вектор узла пространственной равномерной сетки, построенной с шагом 1 по декартовым координатам,  $T_j$  – узел сетки по времени,  $F_i, i=1, \dots, 9$  – функции распределения, соответствующие псевдо-частицам

со скоростями  $\mathbf{V}_i$ ,  $F_i^{(eq)}$  – функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла,  $\tau$  – безразмерное время релаксации ( $\tau = \lambda / \delta t$ , где  $\lambda$  есть истинное время релаксации),  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_9)$ .

Схема вида (1) может быть построена разными способами – например, как обобщение вычислительной модели решеточного газа [2], или посредством дискретизации кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука [10–12].

Параметр  $\tau$  связан с кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu$ , фигурирующим в системе уравнений Навье–Стокса, следующим соотношением:  $\nu = 1/3(\tau - 1/2)l^2 / \delta t$  которое было найдено при получении системы уравнений Навье–Стокса методом Энскага–Чепмена (например, см. [13]).

В случае модели D2Q9 плотность  $\rho$  и скорость среды  $\mathbf{u}$  вычисляются через  $F_i$  по следующим формулам:

$$\rho = \sum_{i=1}^9 F_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i F_i.$$

Конечно-разностные решеточные схемы строятся посредством использования конечных разностей для замены производных, входящих в следующую систему уравнений, получаемую методом дискретных скоростей из кинетического уравнения, выписанного в безразмерном виде:

$$\frac{\partial f_i(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla f_i(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\tau} (f_i(t, \mathbf{r}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t, \mathbf{r}))), \quad (2)$$

где  $t$  – безразмерное время (время, нормированное на  $\delta t$ ),  $\mathbf{r} = (x, y)$  – вектор безразмерных пространственных переменных (декартовы координаты, нормированные на 1),  $f_i$  – безразмерные функции распределения. Основными достоинствами такого типа схем являются: возможность использования разных значений шагов по времени и по пространственным переменным (в отличие от (1), где значения 1 и  $\delta t$  связаны соотношением:  $1 = |\mathbf{V}_i| \delta t$ ), а также возможность использования неравномерных и адаптивных сеток.

В настоящей работе рассматриваются только явные и одношаговые (двухслойные) схемы на равномерной по времени сетке, построенной с шагом  $\Delta t$ , при этом производные по  $t$  в (2) аппроксимируются с помощью правой разностной производной:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\Delta t}.$$

Пространственная сетка также предполагается равномерной и строится с шагом  $h$  по обеим переменным.

В работах [6–9] предложена схема, в которой производные по пространственным переменным

аппроксимируются с помощью центральных разностных производных:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{2h},$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{2h}.$$

В результате получается разностная схема, аппроксимирующая (2) с первым порядком по времени и со вторым – по пространственным переменным:

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) - v_{ix} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})) - v_{iy} \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})). \quad (3)$$

В работах [6, 8, 9] предложено аппроксимировать производные по пространственным переменным с первым порядком с помощью направленных конечных разностей:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{h}, v_{ix} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{h}, v_{iy} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Получившаяся при такой аппроксимации производных разностная схема имеет вид:

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) - v_{ix} \Delta t R_{ix}^1 - v_{iy} \Delta t R_{iy}^1. \quad (4)$$

В статьях [7, 8] производные предложено аппроксимировать уже со вторым порядком также посредством направленных конечных разностей

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-2l})}{2h}, v_{ix} \geq 0, \\ \frac{-3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+2l})}{2h}, v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-2})}{2h}, v_{iy} \geq 0, \\ \frac{-3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+2})}{2h}, v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Получающаяся при этом разностная схема имеет вид:

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) - v_{ix} \Delta t R_{ix}^2 - v_{iy} \Delta t R_{iy}^2. \quad (5)$$

Для краткости и удобства дальнейшего изложения материала схему, задаваемую посредством (1), будем называть схемой 1, а схемы, построенные с помощью метода конечных разностей и задаваемые посредством (3)–(5) будем называть схемами 2, 3 и 4 соответственно.

**3. Постановка задачи об исследовании устойчивости.** По аналогии с работами [6, 14], будем производить исследование устойчивости только по начальным условиям. Рассматриваются стационарные пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых безразмерные макровеличины  $\bar{\rho}, \bar{u}_x, \bar{u}_y$  являются постоянными. Значения равновесных функций распределения в этом случае тоже являются постоянными:  $f_i^{(eq)} = \bar{f}_i^{(eq)} = \text{const}$  и их совокупность будет являться невозмущенным решением каждой из разностных систем (3)–(5). Исследуются два режима течения:  $\bar{u}_x = U = \text{const}, \bar{u}_y = 0$  (режим 1) и  $\bar{u}_x = \bar{u}_y = U = \text{const}$  (режим 2), при предположении, что  $\bar{\rho} = 1$ .

Как и в работах [6, 14, 15], будет исследоваться устойчивость по линейному приближению с помощью метода фон Неймана. При его применении задачи об исследовании устойчивости невозмущенных решений систем (3)–(5) сведутся к задачам исследования устойчивости нулевых решений систем разностных уравнений следующего вида:

$$G_i(t_j + \Delta t) = \sum_{m=1}^9 A_{im} G_i(t_j), \quad (6)$$

где сеточные функции  $G_i$  используются в соотношениях (подробнее см. [14]):

$$\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = G_i(t_j) \exp(i\mathbf{Pr}_{kl}),$$

в которых  $\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$  являются отклонениями от невозмущенных решений систем (3)–(5),  $\mathbf{i}^2 = -1$ ,  $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$ ,  $P_x, P_y \in [-\pi, \pi]$ .

Выражения для фигурирующих в (6) коэффициентов  $A_{im}$  в случае схемы 2 имеют следующий вид:

$$A_{im} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{2h} (v_{ix} (\exp(ihP_x) - \exp(-ihP_x)) + v_{iy} (\exp(ihP_y) - \exp(-ihP_y))) + \\ + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}), \quad m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}), \quad m \neq i. \end{cases}$$

В случае схемы 3 они имеют вид

$$A_{im} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{h} (v_{ix} \tilde{R}_{ix}^1 + v_{iy} \tilde{R}_{iy}^1) + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}), \quad m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}), \quad m \neq i. \end{cases}$$

где

$$\tilde{R}_{ix}^1 = \begin{cases} 1 - \exp(-ihP_x), & v_{ix} \geq 0, \\ \exp(ihP_x) - 1, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_{iy}^1 = \begin{cases} 1 - \exp(-ihP_y), & v_{iy} \geq 0, \\ \exp(ihP_y) - 1, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

В случае схемы 4  $A_{im}$  представляются в виде:

$$A_{im} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{2h} (v_{ix} \tilde{R}_{ix}^2 + v_{iy} \tilde{R}_{iy}^2) + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}), \quad m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}), \quad m \neq i. \end{cases}$$

где

$$\tilde{R}_{ix}^2 = \begin{cases} 3 - 4 \exp(-ihP_x) + \exp(-2ihP_x), & v_{ix} \geq 0, \\ 3 - 4 \exp(ihP_x) + \exp(2ihP_x), & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_{iy}^2 = \begin{cases} 3 - 4 \exp(-ihP_y) + \exp(-2ihP_y), & v_{iy} \geq 0, \\ 3 - 4 \exp(ihP_y) + \exp(2ihP_y), & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Нулевое решение системы (6) будет устойчиво, если все собственные значения комплексной матрицы  $\mathbf{G} = \{G_{im}\}$  по модулю не будут превосходить единицы (например, см. [16]).

Устойчивость схем 2 и 3 исследовалась в работе [6], но для случая модели D2Q7. При этом рассматривался случай, когда векторы  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_x, \tilde{u}_y)$  и  $\mathbf{P}$  сонаправлены. В настоящей работе подобного ограничения не ставится.

При всех принятых выше допущениях собственные значения  $\mathbf{G}$  будут являться функциями следующих переменных:  $P_x, P_y, U, \Delta t, h, \tau$ . Причем  $U, \Delta t, h, \tau$  являются входными параметрами. Для упрощения проведения расчетов вместо  $\Delta t$  и  $h$  рассматривался параметр Куранта  $\gamma = v\Delta t/h$ , где  $v$  – модуль безразмерной скорости псевдочастиц по основным направлениям решетки (по  $x$  и по  $y$ ). В случае модели D2Q9 для схемы 1  $\gamma = 1$  (например, см. [2]).

Задачи на поиск собственных значений для матрицы  $\mathbf{G}$  численно решались с помощью QR-алгоритма, реализованного на языке FORTRAN 90 в пакете EISPACK [17]. Анализ устойчивости проводится посредством исследования областей устойчивости на плоскости значений параметров  $(\tau, U)$  при варьировании значений  $\gamma$ .

**4. Области устойчивости.** При исследовании устойчивости рассматривались следующие значения  $\gamma$ : 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1. Параметр  $\tau$  изменялся от 0 до 2, а параметр  $U$  – от 0 до 1. Область изменения этих параметров разбивалась равномерной сеткой из  $100 \times 100$  узлов. Точка считалась входящей в область устойчивости, если при фиксированных  $\tau$  и  $U$  для всех значений  $(P_x, P_y)$  все собственные значения матрицы  $\mathbf{G}$  по модулю не превосходили единицы. Область изменения параметров  $(P_x, P_y)$  разбивалась сеткой из  $200 \times 200$  узлов.

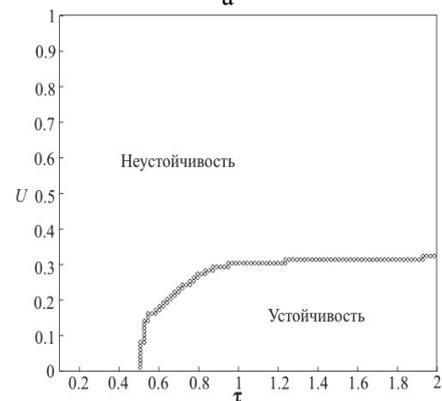
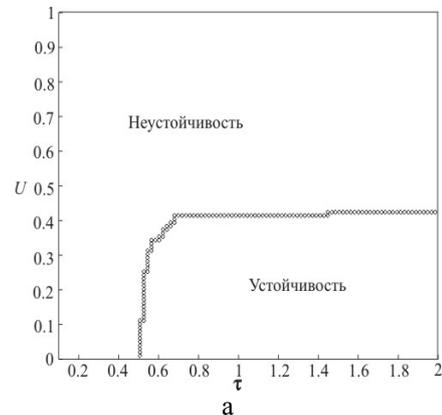


Рис.1. Границы областей устойчивости для случая схемы 1 в случае режима 1 (а) и режима 2 (б).

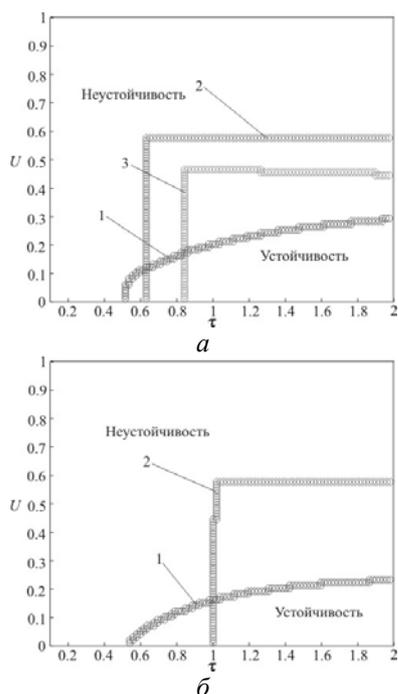


Рис.2. Границы областей устойчивости для случая схем 2–4 в случае режима 1 при  $\gamma = 0.1$  (а) и  $\gamma = 0.25$  (б).

Таблица 1. Связь значений параметров  $\gamma$ ,  $\bar{U}$  и  $\tau$  для случая режима 1.

Значение $\gamma$	Схема 2	Схема 3	Схема 4
0.1	$\bar{U} = 0.29$ , $\tau \in [1.95, 2]$	$\bar{U} = 0.59$ , $\tau \in [0.62, 2]$	$\bar{U} = 0.47$ , $\tau \in [0.84, 1.2]$
0.25	$\bar{U} = 0.21$ , $\tau \in [1.85, 2]$	$\bar{U} = 0.57$ , $\tau \in [1.01, 2]$	—
0.5	$\bar{U} = 0.12$ , $\tau \in [1.05, 1.36]$	—	—

Таблица 2. Связь значений параметров  $\gamma$ ,  $\bar{U}$  и  $\tau$  для случая режима 2.

Значение $\gamma$	Схема 2	Схема 3	Схема 4
0.1	$\bar{U} = 0.2$ , $\tau \in [1.95, 2]$	$\bar{U} = 0.58$ , $\tau \in [0.65, 1.25]$	$\bar{U} = 0.28$ , $\tau \in [1.4, 2]$
0.25	$\bar{U} = 0.19$ , $\tau \in [1.96, 2]$	$\bar{U} = 0.48$ , $\tau \in [1.04, 1.2]$	—
0.5	$\bar{U} = 0.1$ , $\tau \in [1.28, 1.34]$	—	—

Области устойчивости для конечно-разностных схем при  $\gamma = 0.75$  и  $\gamma = 1$  оказались пустыми. Для случая же схемы 1 (для которого, как упоминалось выше, справедливо лишь значение  $\gamma = 1$ ) области устойчивости в случае обоих режимов не являются пустыми. Это говорит о существенном преимуществе схемы 1 при  $\gamma = 1$ . Отметим, что в случае режима 1 в область устойчивости входит больше точек, чем в случае режима 2. Формы границ области устойчивости для случая схемы 1 представлены на рис. 1. Максимально возможное значение параметра  $U$ , при котором имеет место устойчивость, обозначим как  $\bar{U}$  и оно равно 0.43 (соответствует  $\tau \in [1.44, 2]$ ) в случае режима 1, и 0.33 (соответствует  $\tau \in [1.93, 2]$ ) в случае режима 2. На рис. 2 представлены формы областей устойчивости для схем 2–4 в случае режима 1 при различных значениях  $\gamma$ , а в табл. 1 приведены значения  $\bar{U}$  и соответствующие им интервалы изменения  $\tau$ . Прочерки в ячейках таблицы означают, что при таком значении  $\gamma$  область устойчивости является пустой.

Границы областей устойчивости для схем 2–4 в случае режима 2 при различных значениях  $\gamma$  представлены на рис. 3, а в табл. 2 приведены значения  $\bar{U}$  и соответствующие им интервалы изменения  $\tau$ .

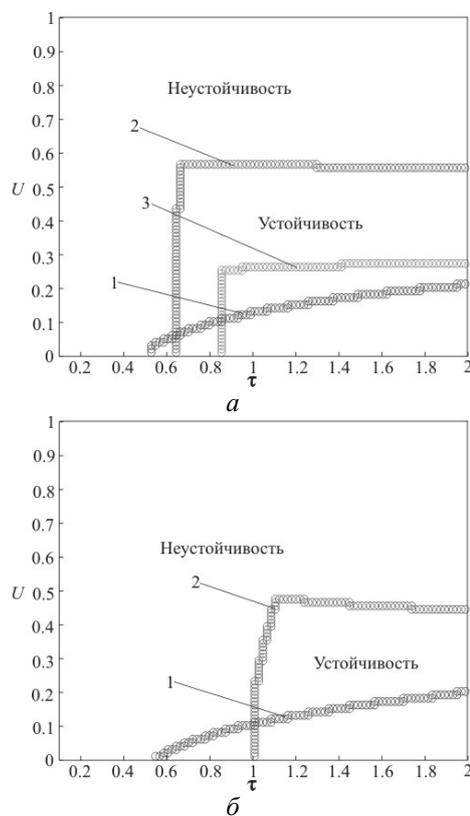


Рис.3. Границы областей устойчивости для случая схем 2–4 в случае режима 2 при  $\gamma = 0.1$  (а) и  $\gamma = 0.25$  (б)

Интересно отметить, что в случаях обоих рассмотренных режимов при увеличении значения  $\gamma$  области устойчивости сужаются, причем в случае режима 1 в них всегда входило больше точек, чем в случае режима 2. Значения  $\bar{U}$  в случае режима 2 всегда было меньше соответствующего значения для случая режима 1. В случаях  $\gamma = 0.1$  и  $\gamma = 0.25$  наибольшее число точек входило в области устойчивости, соответствующие схеме 3.

**5. Заключение.** Представленные результаты позволяют судить о том, что даже в случаях простых однородных стационарных течений явные конечно-разностные решеточные схемы Больцмана в случае модели D2Q9 являются условно устойчивыми, причем устойчивость схем существенно зависит от входных параметров задачи. Из рассмотренных схем определенным преимуществом обладает схема с направленными разностями, аппроксимирующая систему (2) с первым порядком, поскольку ее области устойчивости в широком диапазоне изменения параметры  $\tau$  включают в себя наибольшее число точек для обоих режимов. Интересно отметить, что при  $\gamma = 1$  решеточное уравнение Больцмана (1) обладает несомненными преимуществами по сравнению с конечно-разностными схемами (естественно, речь идет только о случаях рассмотренных в статье стационарных режимов).

Полученные результаты можно рассматривать как решения тестовых задач, которые могут оказаться полезными при проведении исследований и сравнении друг с другом различных решеточных кинетических схем Больцмана, в том числе и схем для расчета многофазных течений. Определенную важность они могут представлять в задачах исследования неявных схем (см. [18–20]). Большую значимость имеют также исследования устойчивости по граничным условиям, поскольку, как показано в [21], различные способы реализации граничных условий по-разному влияют на свойство устойчивости решеточных кинетических схем Больцмана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Четверушкин Б. Н. *Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике*. М.: Изд-во МГУ. – 1999. – 231 с.
2. Wolf-Gladrow D. A. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models – an introduction*. Berlin: Springer-Verlag. – 2005. – 309 p.
3. Мачин Д. А., Четверушкин Б. Н. Кинетические и lattice Boltzmann схемы. *Матем. мод.* – 2004. – т.16, N 3. – С.87–94.
4. Куперштох А. Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU.

5. *Вычисл. методы и программир.* – 2012. – т.13. – С.130–138.
5. Коган М. Н. *Динамика разреженного газа*. М.: Наука. – 1967. – 440 с.
6. Seta T., Takahashi R. Numerical stability analysis of FDLBM. *J. Statist. Phys.* – 2002. – v.7, № 1/2. – P.557–572.
7. Mei R., Shyy W. On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.* – 1998. – v.143. – P.426–448.
8. Sofonea V., Sekerka R. F. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models. *J. Comput. Phys.* – 2003. – v.184. – P.422–434.
9. Sofonea V., Lamura A., Gonnella G., Cristea A. Finite-difference lattice Boltzmann model with flux limiters for liquid-vapor systems. *Phys. Rev. E.* – 2004. – v.70. – P.046702-1–046702-9.
10. He X., Luo L.-S. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E.* – 1997. – v.55, N 6. – P.R6333–R6336.
11. Abe T. Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation. *J. Comput. Phys.* – 1997. – v.131, N1. – P.241–246.
12. Luo L.-S. Theory of the lattice Boltzmann method: lattice Boltzmann models for nonideal gases. *Phys. Rev. E.* – 2000. – v.62, N 4. – P. 4982–4996.
13. He X., Luo L.-S. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation. *J. Stat. Phys.* – 1997. – v.88, № 3/4. – P.927–944.
14. Sterling J. D., Chen S. Stability analysis of lattice Boltzmann methods. *J. Comput. Phys.* – 1996. –v.123. – P.196–206.
15. Kupershtokh A. L. Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations. *Computers and Mathematics with Applications.* – 2010. – v.59. – P.2236–2245.
16. Федоренко Р. П. *Введение в вычислительную физику*. М.: Изд-во МФТИ. – 1994. – 528 с.
17. Smith B., Boyle J., Dongarra J., Garbow B., Ikebe Y., Klema V., Moler C. *Matrix Eigensystem Routines. EISPACK Guide. Lecture Notes in Computer Sci.* Vol. 6. Springer. – 1976. – 560 p.
18. Кривовичев Г.В. О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана. *Вычисл. методы и программир.* – 2012. – т. 13. – С. 19–27.
19. Rector D. R., Stewart M. L. A semi-implicit lattice method for simulating flow. *J. Comput. Phys.* – 2010. – v.229. – P.6732–6743.
20. Cao N., Chen S., Jin. S., Martinez D. Physical symmetry and the lattice symmetry in the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E.* – 1997. – v.55, N 1. – P.R21–R24.
21. Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., Michler A. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E.* – 2008. –v.77. – P.056703-1–056703-16.