УДК 517.165

НЕРАВЕНСТВА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Филер З.Е.

Кировоградский государственный педагогический университет, Кировоград, Украина

Рассматривается метод невязки решения неравенства $f(x)>0$ $(f(x)<0)$, сводящий задачу об отыскании множества решений к решению системы уравнений $f(x)=t$ $(f(x)+t=0)$ и неравенства $t>0$. При действительной невязке получаем одномерное множество комплексных решений, даже когда действительных решений нет. Обобщено классическое понятие неравенства. Предложен метод комплексной невязки $s+it>0$, когда решение неравенства является плоской двумерной фигурой. Приведены примеры.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: неравенства, метод невязки, комплексные числа.

НЕРІВНОСТІ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Філер З.Ю.

Розглядається метод невязки розв’язання нерівності $f(x)>0$ $(f(x)<0)$, що зводить задачу про відшукання множини розв’язків до розв’язання системи рівнянь $f(x)=t$ $(f(x)+t=0)$ і нерівності $t>0$. При дійсній невязці отримуємо одновимірну множину комплексних рішень, навіть коли дійсних розв’язків немає. Узагальнено класичне поняття нерівності. Запропоновано метод комплексної невязки $s+it>0$, коли рішення нерівності є плоскою двовимірної фігурою. Наведені приклади.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нерівності, метод невязки, комплексні числа.

INEQUALITIES IN THE COMPLEX PLANE

Filer Z.Yu.

Solution of the inequality $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ by residual method, which reduces the problem of finding the set of solutions to a system of equations $f(x)=t$ $(f(x)+t=0)$ and inequality $t>0$ is considered. When the discrepancy is a real numbe, one-dimensional set of complex solutions can be obtained, even when there are no real solutions. The classical notion of inequality is generalized. A method of complex residual $s+it>0$, when the solution of the inequality is a flat two-dimensional figure is proposed. Some examples are given.

KEY WORDS: inequality, residual method, complex numbers.

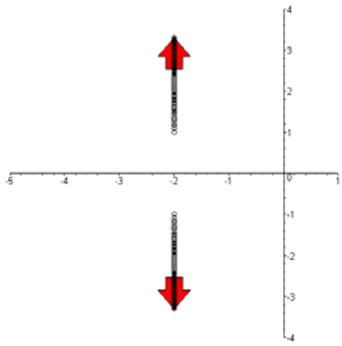
1. Введение. В математике понятие *неравенства* вводится как отношение на множестве *действительных* чисел. Это настолько привычно, что факт принадлежности чисел (функций), входящих в неравенство, к множеству действительных чисел, принимается по умолчанию [1, с. 999–1000]: «…неравенство $x^2-4x+3>0$ верно при x=4 и неверно при $x = 2$. Для Н. …возникает вопрос об их решении, т.е. об определении границ, в которых следует брать входящие в Н. величины для того, чтобы Н. были справедливы… Оно будет верно для всех x, удовлетворяющих одному из …неравенств: x<1, x>3 и являются решением данного Н.». Между тем, *родственное* неравенство $x^2-4x+3<0$ имеет, кроме действительного $1<x<3$ ещё и *комплексные* решения $\{x = 2\pm i\sqrt{t-1} \mid t>1\}$.

2. Метод невязки решения неравенств. Для неравенства f(x)>0 введением положительного параметра (невязки – разницы между левой и правой частями неравенства) t совершён переход к уравнению $f(x) = t$ с неравенством $t>0$; аналогично, для неравенства $f(x) < 0$ получаем уравнение $f(x) = -t$ с неравенством для параметра $t>0$. Это дает *метод* отыскания как действительных, так и комплексных решений $x(t)$ при всех $t>0$.

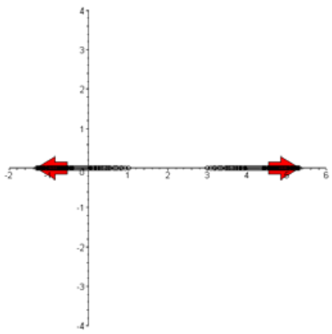
Особенно удобен метод для поиска решений неравенств вида $a < f(x) < b$, эквивалентных уравнению $f(x) = a + (b-a)t$ с параметром $t\in (0; 1)$. Здесь процесс поиска финитизирован: достаточно задать для t сетку и решить уравнение для каждого $t_к$, получив изображение множества

$x(t_к)$, дающее представление о решении при достаточно малом шаге сетки $\Delta t_к$. Для уравнений разработаны компьютерные методы решения, что позволяет использовать для решения неравенств современную вычислительную технику, в том числе при преподавании математики в средней школе [4 – 8].

3. Пример использования метода. Неравенство $x^2 + 4x + 5 < 0$ не имеет действительных решений, но имеет комплексные решения, которые можно найти, перейдя к уравнению $x^2 + 4x + 5 + t = 0$ с параметром, принимающим значения $t > 0$. Получаем $x(t) \in \{x = -2 \pm i\sqrt{t+1} \mid t>0\}$. Эти точки заполняют прямую $x = -2$ без отрезка, где $|y| \le 1$(рис. 1а). Полученное решение аналогично описанному в [1] для неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$ – прямой $y=0$ без отрезка $|x-2| \le 1$ (рис. 1б).



а



б

Рис. 1. Иллюстрация к примеру 3 решения неравенства в области комплексных (а) и действительных (б) значений.

Метод невязки отвечает не только на вопрос: где лежат точки, удовлетворяющие неравенству, но и на вопрос, насколько конкретное $x(t)$ даёт разность между $f(x)$ и нулём – на величину соответствующего t. Параметр t структурирует множество решений, указывая положение каждого элемента $x(t)$. При этом каждому *x* соответствует единственное число t; однако, одному t может отвечать несколько значений *$x(t)$,* если обратная функция $f^{-1}(t)$ многозначна. Так будет и для квадратичной функции *$f(x)$,* в частности.

Можно ли решать неравенства с комплексными неизвестными вида $f(z) > a+ib$ для действительных a и b при $z=x+iy$, где x и y – действительны? В [4] была предложена следующая постановка: действительная часть $u(x,y)$ функции $f(z)$ должна удовлетворять неравенству $u(x,y)>a$, мнимая $v(x,y)$ – уравнению $v(x,y)=b$. Между тем, нет необходимости отделять действительную часть функции от мнимой; достаточно, используя метод невязки, решать уравнение $f(z)= t + a+ib$.

Двойное неравенство $c+id< f(z)< a+ib$ сводится к системе, содержащей уравнение $f(z) = c+id + t*(a-c + i(b-d))$ и неравенство $0<t<1$. Введенное отношение неравенства полуупорядочивает подмножества комплексных чисел – значений функции; сравниваются только пары чисел, для которых мнимые части одинаковы, $\mathrm{Im}(f(z)) = b$. Это требует, чтобы $b-d = 0$, т.е. $b = d$, мнимые части левой и правой частей данной системы неравенств совпадали: $c+ib< f(z)< a+ib \Rightarrow a<c$. Тогда для $z(t)$ получаем уравнение $f(z) - (c+ib) = t*(a-c)$. Правая часть этого уравнения есть действительное отрицательное число. Для линейного неравенства

$$-1+2i<3z+4<5+2i \;\Rightarrow\; 3z+4-2i = -1+6t \Rightarrow$$

$$z = (-5+2i+6t)/3 \Rightarrow z \in \{(-5+2i)/3+2t \mid 0<t<1\}.$$

Эти точки лежат на вертикальном отрезке, выходящем из точки $z_0 = (-5 +2i)/3$, длиной 2, направленном вверх.

В 1799 г. … К.Ф. Гаусс доказал теорему, которая носит название «основная теорема алгебры многочленов»: любой многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень [2, с. 203]. Предложенный выше метод сведения неравенства к уравнению с параметром t, позволяет сформулировать основную теорему о неравенствах для многочленов. Почему за 200 лет после Гаусса не появилось обобщения этой теоремы на неравенства? Только лишь традиция? Думается, что не только. Не было зримого приложения комплексных решений неравенств. Так, в учебнике по высшей алгебре [3, с.92] при доказательстве основной теоремы алгебры используется лемма Д'Аламбера: если $f(z_0)\neq 0$, то найдётся точка z_1, значение модуля $|f(z_1)|$ в которой меньше $|f(z_0)|$. В доказательстве решается неравенство $1 + c_к h^k < 1 \Rightarrow c_к h^k < 0$ при комплексных $c_к$ и h. Там $h = z_1 - z_0$ – смещение из точки z_0 в направлении уменьшения модуля полинома. Далее доказывается, что это приводит к точке минимума функции $f(z)$, в котором она равна 0, т.е. точка минимума является корнем полинома. Но это эпизодическое использование комплексного решения неравенства внутри самой математики. Если комплексные корни алгебраических уравнений важны для, например, решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, используемых в различных разделах физики, а значит, и техники, то для неравенств напрямую такой сферы приложений пока не нашлось.

4. Обобщение понятия неравенства. Решение уравнения $f(z) = t*e^{i\varphi}$ с параметрами $t>0$ и $0\le\varphi<2\pi$ при $\varphi=0$, эквивалентно неравенству $f(z)>0$, а при $\varphi = \pi$ – неравенству $f(z)< 0$. Оно показывает, что задача отыскания функции $z(t,\varphi)$, удовлетворяющей уравнению $f(z) = t*e^{i\varphi}$ при $t>0$ и $0\le\varphi<2\pi$, является обобщением понятия неравенства на множестве комплексных чисел. При фиксированном φ она является поиском прообраза *луча* при всех $t>0$. В школе этим лучом является действительная полуось. Таким образом, решение неравенств является пропедевтикой решения задачи поиска прообраза по заданному образу известного отображения с помощью данной функции. Прообразы 8 лучей $w=t*\exp(i\varphi)$, $t=k\pi/4$, при $k = 0, 1, \ldots, 7$ при отображении с помощью функции $f(z) = z^2 + 4z + 5$ приведены на рис. 2.

Уравнение $f(z) = t*e^{i\varphi}$ можно записать и в виде $f(z)e^{-i\varphi} = t \Rightarrow f(z)e^{-i\varphi}>0$ или

$f(z)e^{-i(\varphi-\pi)}= - t \Rightarrow f(z)e^{-i(\varphi-\pi)}< 0$. Таким образом, видно, что это уравнение с неравенством $t>0$ эквивалентно обычным классическим неравенствам, но с другой функцией $f_1(z) = f(z)e^{-i\varphi}$. Напомним, что неравенство $f_1(z)>0$ равносильно совокупности неравенства $\mathrm{Re}f_1(z)>0$ и уравнения $\mathrm{Im}f_1(z)=0$.

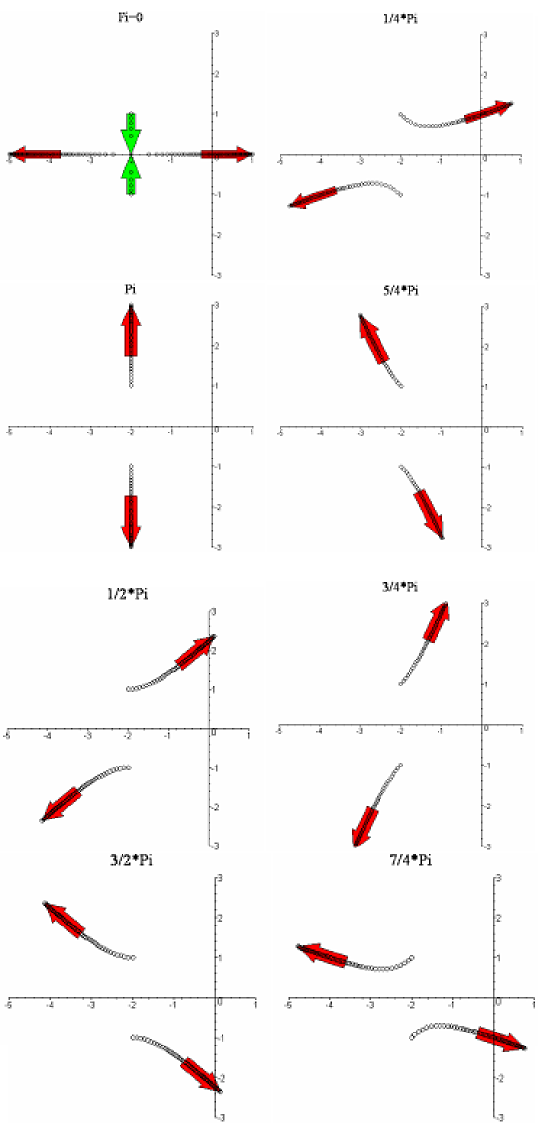
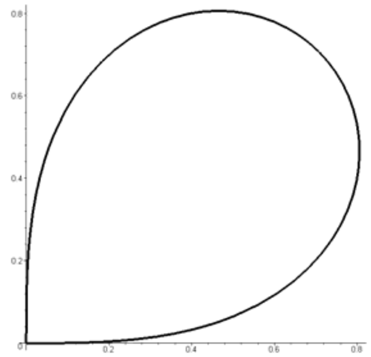
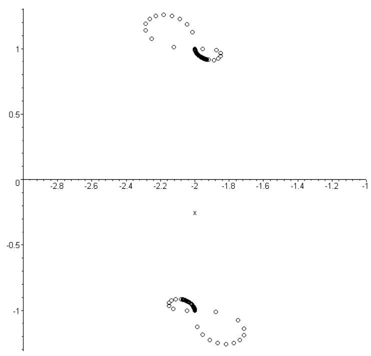


Рис. 2. Прообразы 8 лучей в комплексной плоскости. Пояснения в тексте.

Можно рассматривать и задачу поиска прообраза отрезка a<t<b. Ещё более общей задачей является поиск прообраза фигуры – области в плоскости W, задаваемой уравнением линии – границы области. На рис. 3а показан образ – область, ограниченная линией $(u^2 +v^2)^2 = 2uv$ в плоскости uOv, записанной в декартовой системе координат; в полярной системе она имеет уравнение $r^2 = \sin(2\varphi)$. Её прообраз при отображении с помощью функции $f(z) = z^2 + 4z + 5$ находится с помощью уравнения относительно z: $z^2 + 4z + 5 = t*\sqrt{\sin(2\phi)}*e^{i\varphi}$ с параметрами $t \in(0; 1)$, $\varphi\in(0;\pi/2)$ (рис. 3б).



а



б

Рис.3. Область в комплексной плоскости (а) и ее прообраз (б). Пояснения в тексте.

5. Возможность дальнейших обобщений. В любом метрическом пространстве Y можно ввести орт вектора $\mathbf{y^0} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$. Тогда прообраз луча, сонаправленного с вектором $\mathbf{y}$, при отображении f(x) определится из уравнения $f(x) = t* \mathbf{y^0}$ с параметрами t и $\mathbf{y^0}$. В частности, можно искать прообразы для функции трёх пространственных переменных (x, y, z) и четырёх координат «мировой точки» (x, y, z, t).

В практике преподавания в школе привычными являются утверждения

- показательная функция с положительным основанием *всегда* положительна;
- отрицательные числа логарифмов не имеют;
- корни чётной степени из отрицательных чисел не существуют;
- функции косинус и синус не могут быть больше 1 по модулю и некоторые другие, производные от указанных утверждений.

Несправедливость этих утверждений доказывается контрпримерами. Так, неравенство $e^x < 0$ эквивалентно уравнению $e^x = -t,\ t > 0$. Логарифмируя по основанию e, получим $x = ln(t) + i\pi(1 + 2k),\ k\in Z$, т.е. даже бесконечное множество таких x, но все они суть комплексные числа (рис. 4).

Для отыскания корней n-ой степени из комплексного числа надо найти корень арифметический из модуля, а аргумент подкоренного числа со слагаемым 2πк (к = 0, 1, 2, … , n – 1), поделить на показатель корня n. При подкоренном отрицательном числе его аргумент равняется π, поэтому мы будем иметь n различных комплексных корней. Для положительного же подкоренного числа при чётном n = 2m будет 2 действительных корня противоположных знаков. В показательной форме $\sqrt[2m]{a}e^{i(2\pi k)/(2m)}$ при a>0 и $\sqrt[2m]{|a|}e^{i(2\pi k+\pi)/(2m)}$ при a<0. При к = 0 и при к = m , будем иметь аргумент одного из корней, равный 0, а другого – равный π, что даёт арифметический (положительный) корень и ему противоположный, отрицательный корень в первом случае. Во втором случае число (2к+1) нечётно и при делении на 2 не даёт целого числа, которое и приводит к действительным значениям корней

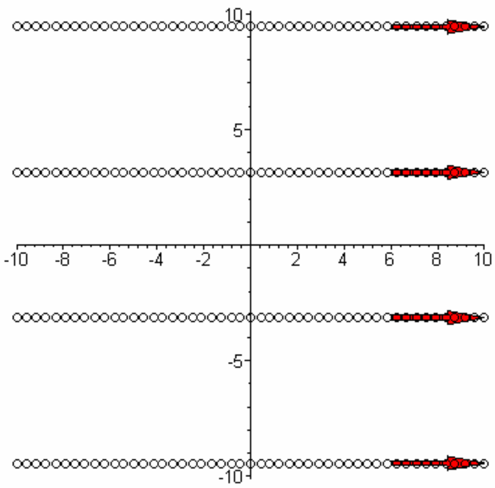


Рис. 4. Графическое представление логарифма отрицательного числа в комплексной плоскости.

Покажем это, решая неравенство $sin(z) > 1$. Перейдём к уравнению $sinz = 1+ t,\ t > 0$. Используя формулу Эйлера, заменим синус через показательную функцию: $(e^{iz}-e^{-iz})/(2i) = 1+t \Rightarrow a+1/a = 2i(1+t)$, где $a = e^{iz} \Rightarrow a^2 - 2i(1+t)a + 1= 0 \Rightarrow a = i(1+t) \pm \sqrt{1-(1+t)^2} = i(1+t \pm \sqrt{(1+2t)t}\ )$. Теперь z можно найти, логарифмируя найденное a. Очевидно, аргумент a равен аргументу мнимой единицы i, т.е. π/2. А логарифм использует этот аргумент. Таким образом, значение синуса окажется комплексным числом, действительная часть которого не зависит от t, но содержит слагаемое 2кπ при целом к. Решения неравенства заполняют вертикали, отстоящие друг от друга Решения неравенства заполняют вертикали, отстоящие друг от друга на 2π; при к=0 эта вертикаль проходит через точку $(\pi/2,\ 0)$. При $t > 0$ эта точка не принадлежит решению. При $t = 0$ получаем действительное решение $x= \pi/2 + 2\pi k$. Постройте семейство решений этого неравенства и сделайте рисунок с указанием направления при возрастании невязки t.

Аналогично можно решить неравенство
$cosx < -1$:
$(e^{ix} + e^{-ix})/2 + t + 1 = 0 \Rightarrow a+1/a + 2(1+t) = 0,\ a = e^{ix} \Rightarrow a^2 + 2(1+t)a + 1 = 0 \Rightarrow a = -(1+t) \pm \sqrt{(1+t)^2-1}$.
Нетрудно видеть, что $a>0$ при $t>0$, а поэтому ix имеет и действительное значение; тогда значение x мнимое. Проделайте все выкладки, найдите, например, все x, косинус которых равен –2. Сделайте рисунок, убедитесь, что на комплексной плоскости такие x будут заполнять вертикальные прямые, отстоящие друг от друга на 2π. Среди них одна совпадёт с мнимой осью $Im\ x$. Найдите на них направление возрастания невязки.

Отмеченные неверные утверждения становятся правильными при добавлении слова действительные. Конечно, если в классе не вспоминали, что кроме действительных чисел могут быть и комплексные, то дети этой оговорки просто не поймут. Поэтому сразу после вывода формулы для корней квадратного уравнения надо рассказать о полезности введения числа $i = \sqrt{-1}$, числа, квадрат которого равен -1, и назвать числа вида $a+ib$ комплексными. Известный методист донецкий учитель В.Ф. Шаталов называл их «родителями всех чисел»: при $b = 0$ получаем действительные числа, при $a=0$ – мнимые числа.

Вообще, понятие становится понятным лишь тогда, когда очерчены границы его применения. Определение множества действительных чисел как объединения множеств рациональных и иррациональных чисел некорректно, ибо приставка *ир-* эквивалентна русской *не-*. Что же входит в это *не-* ученикам непонятно. Определить же множество R как совокупность координат всех точек числовой прямой, значительно разумнее и ближе к определению его как подмножества точек плоскости, которые и изображают все комплексные числа. Тогда становится понятным, что наугад взятая точка будет изображаться, как правило, комплексным числом, и лишь как исключение – действительным; ещё реже эта точка будет рациональной (т.е. отношением целых чисел). Кстати, почему множество рациональных чисел так называют? Почему его обозначают буквой Q? На этот вопрос не ответит большинство учителей. Между тем, немцам легче, ибо у них можно записать Quotient = Dividend/ Divisor (частное – отношение = делимое/делитель). Тут слово “рацио” близко по смыслу к слову “разум”. Его тоже употребляют в математике, говоря “это решение нерационально”.

Излюбленными задачами в разделе “Введение в анализ” являются “Найти область существования функции, заданной формулой”. Там–то и используются указанные утверждения. Всё станет на своё место, если будет добавлено, что ищутся действительные значения аргумента, где данная функция принимает действительные значения. Например, функция ln(1–x), безусловно, принимает действительные значения при x<1, но не только действительные; она многозначна, её значения отличаются друг от друга на $2\pi i$. Правда, когда хотят говорить о множестве всех (и комплексных) значений, пишут $\mathrm{Ln}(1-x) = \ln|1-x| + i(\arg(1-x) + 2\pi k)$, $k\in Z$. Очевидно, здесь надо исключить число x=1, ибо ln(0) не существует и во множестве *C* комплексных чисел.

Существует много привычных правил и теорем, справедливых для множества действительных чисел, связанных с неравенствами, которые не всегда справедливы для множества комплексных чисел. Так, теорема о существовании корня *с* на отрезке (а, в), на концах которого функция принимает значения разных знаков, неверна. Это показывает контрпример: функция e^{ix} равна +1 при x=0 и –1 при $x=\pi$, но модуль этой комплекснозначной функции при *всех* действительных x (а не только на $(0; \pi)$) равен 1. Поэтому она вообще не имеет корней.

Если взять комплексное $x = \alpha+i\beta$, то при $\beta\to+\infty$ функция e^{ix} будет стремиться к 0 при всех α, но не достигать 0 при конечных x. В отличие от неё многочлен не имеет корней на бесконечности (теорема о модуле старшего члена), поэтому уменьшение модуля для него ведёт к точке минимума внутри некоторого круга и лемма Д’Аламбера даёт гарантию нулевого значения модуля многочлена в этой точке [3, с.94].

Кривая $y=u(x)+iv(x)$ при $x\in(0; \pi)$ для функции $y= e^{ix}$ является полуокружностью, которая не проходит через какую-то точку (x; 0).

Часто даже в хороших пособиях есть оговорка «В этой книге всюду, где не оговорено противного, все числа предполагаются действительными» [9, с. 246]. Видимо, это относится и к теореме о существовании промежуточного значения непрерывной функции на замкнутом интервале [9, с. 274].

6. Что дала политика “всё или ничего”. Начиная с середины 70-х годов прошлого века комплексные числа изъяли из школьной программы по математике. Интересно, что инициатором этого был А.И. Маркушевич, автор многих учебников по теории функций комплексного переменного (ТФКП). Он возмутился резким уменьшением числа часов на изучение комплексных чисел в связи с введением в школьную программу элементов математического анализа. В результате было решено вообще не изучать комплексные числа в школе, чем изучать их “галопом”. Это привело к тому, что целые поколения учителей не преподавали детям комплексные числа и, изучая их в педвузе, знали, что им это не будет нужно в школе; знали это и их преподаватели методики преподавания математики в школе. Теперь соответствующую культуру и учительские традиции надо возрождать. Надо ли? Безусловно, и не только ради приложений. Пока не было “внешних” приложений ТФКП, на них смотрели как на полёт фантазии самих математиков. Ф.Энгельс писал, что, начиная от натурального числа, все действительные числа были связаны с потребностями счёта и измерения, и только в последнее время (во второй половине X1X века) развилась теория комплексных чисел из потребностей самой математики, являясь полётом чистой фантазии математиков. Через некоторое время развитие гидродинамики и электротехники сделало ТФКП рабочим аппаратом для технических расчётов.

7. Метод комплексной невязки. Комплексные числа можно упорядочить лексикографически, считая число $a+ib<c+id$, если $a<c$ и при $a=c$, если $b<d$. Такой подход реализован в [10, с.31]. Автор подчёркивает выполнение всех обычных свойств неравенств во множестве действительных чисел, кроме $a>0 \Rightarrow a^2>0$. Это показывает пример: $1+3i>0$, но

$(1+3i)^2 = 1+6i-9 = -8+6i<0.$

Применим метод к неравенству $x^2 + 4x +5 < 0$. Ища его решение в комплексной области, положим $x := x+iy$ и введём комплексную невязку $t := s+it$ с $s,t\in R$. Это даст уравнение

$x^2 - y^2 + 4x + 5 + i(2xy + 4y) + s + it = 0,$

эквивалентное системе с параметрами уравнений $(x+2)^2 - y^2 + 1 + s = 0, 2y(x+2) + t = 0$. При $s \ge 0$ имеем уравнение равнобочной гиперболы $\frac{y^2}{1+s} - \frac{(x+2)^2}{1+s} = 1$, а при $s=0$ знаки y и x+2 противоположны. Область – решение – внутренность гиперболы $y^2–(x+2)^2=1$. Граница частично входит в область: левая верхняя и правая нижняя ветви (рис. 5). На оси симметрии этой области лежит решение, полученное с помощью действительной невязки.

8. Выводы. 1. Анализ учебной и справочной литературы показывает, что неравенства, как правило, рассматриваются в действительной области.

2. Автором предложен метод *действительной* невязки, с помощью которого обнаруживаются комплексные решения у квадратных неравенств с действительными коэффициентами.

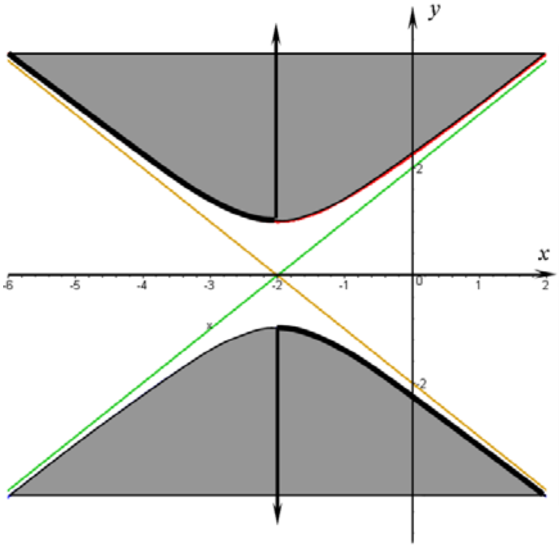
3. Для многочленных неравенств справедлив аналог «основной теоремы алгебры» К.Ф.Гаусса; она переносится на неравенства в классе всех аналитических функций.

4. Решение неравенств является поиском прообраза полуоси (отрезка) при данном отображении. Задача обобщается на любой образ.

5. Предложенный автором метод *комплексной* невязки для неравенств в комплексной области

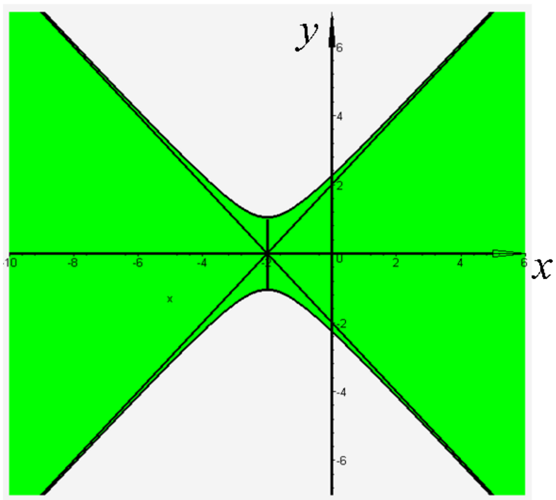
расширяет понятие решения на фигуры на комплексной плоскости.

$$x^2+4x+5<0 \Rightarrow \frac{y^2}{1+s}-\frac{(x+2)^2}{1+s}=1;$$



а

$x^2+4x+5>0$



$y^2-(x+2)^2=1-s,\ 2(x+2)y=t,\ 1>s>0$

б

Рис.5. Примеры использования метода комплексной невязки. Пояснения в тексте.

Автор признателен своим ученикам – бывшему преподавателю техникума С.П.Ткаченко и магистру А.И. Музыченко за помощь в построении рисунков к работе и обсуждение результатов, а также участникам межвузовского семинара «Математика, её приложения и преподавание» (г.Кировоград).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математическая энциклопедия*. Т.3. М.: Сов. энцикл. – 1982. – 1184с.
2. Энциклопедический словарь юного математика. Изд. 2, исправ. и доп. М.: Педагогика. – 1989. – 352 с.
3. Шапиро Г.М. *Высшая алгебра.* Учебник для педвузов. Изд. 4, доп. М.: Учпедгиз. – 1938. – 387 с.
4. Філер З.Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні *Математика, її застосування та викладання. Матеріали міжвузів. регіон. конф.* Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ. – 1999. – С. 141 – 145.
5. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Комплексні розв'язки квадратної нерівності. *Матем. в школі*. – 2003. – N2. – С. 47 – 49.
6. Філер З.Ю., Ткаченко С.П. Основні теореми про нерівності. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*. Вип. 4**. –** Збірн. наук. праць. Т. 1. Теорія та методика навчання математики. Кр.Ріг: НМетАУ, 2004. – С. 281 – 285.
7. Ткаченко С.П., Філер З.Ю. Спосіб нев'язки (відхилу) розв'язування нерівностей. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*. Кр. Ріг: ВВ НметАУ. – 2003. – т.1, Вип.3. – С. 254 – 258.
8. Філер З.Ю., Ткаченко С.П. Метод нев'язки при розв'язанні нерівностей у вузівському курсі математики. В кн.: *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*. Вип. V1, т. 1. Кр.Ріг: Вв. НМетАУ. – 2006. – С. 351 – 355.
9. Выгодский М.Я. *Справочник по высшей математике*. Изд. 6, испр. и доп. – М.: Физматгиз. – 1963. – 872 с.
10. Кужель О.В. *Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа*. К.: Вища школа. – 1974. – 80 с.