УДК 530.21:537.8:539

ДЕФИНИТНОЕ РАСШИРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ. КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Бессмертный М.Ф., Болтоносов А.И.

Харьковский Национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина.

В работе рассматривается «расширение» понятия пространства – времени, в котором евклидова метрика и ориентируемость пространственно-временного континуума порождает «наблюдаемую» индефинитную метрику. Показано, что электрический заряд является «наблюдаемым эффектом» нарушения симметрии между «правым» и «левым» на двухстороннем дефинитном расширении пространства – времени. В рассматриваемой модели квантование электрического заряда возможно независимо от существования магнитного монополя Дирака.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пространство-время, метрика, симметрия, электрический заряд, квантование, магнитный монополь.

ДЕФІНІТНЕ РОЗШИРЕННЯ ПРОСТОРУ З ІНДЕФІНІТНОЮ МЕТРИКОЮ. КВАНТУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ

Бессмертний М.Ф., Болтоносов О.І.

У роботі розглядається «розширення» поняття простору – часу, в якому евклідова метрика і орієнтованість просторово-часового континууму породжує «спостережувану» індефінітну метрику. Показано, що електричний заряд є «спостережуваним ефектом» порушення симетрії між «правим» і «лівим» на двосторонньому дефінітному розширенні простору – часу. В моделі, яка розглядається в роботі, квантування електричного заряду можливо незалежно від існування магнітного монополя Дірака.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: простір-час, метрика, симетрія, електричний заряд, квантування, магнітний монополь.

DEFINITE EXTENSION OF THE SPACE WITH INDEFINITE METRIC. QUANTIZATION OF ELECTRIC CHARGE

Bessmertny M.F., Boltonosov A.I.

The paper considers the "expansion" of the concept of space – time in which the Euclidean metric and orientability of the space-time continuum creates "observe" an indefinite metric. It is shown that the electric charge is "observable effect" of symmetry breaking between "right" and "left" on the definite bilateral expansion of space – time. In the considered model, the quantization of electric charge is possible regardless of the existence of Dirac magnetic monopole.

KEY WORDS: space-time metric, symmetry, the electric charge quantization, magnetic monopole.

«Все, что можно сделать,– это находить математические модели, описывающие Вселенную, в которой мы живем»

Стивен Хокинг
«Мир в ореховой скорлупке»

1.Введение. Индефинитность метрики пространства–времени обычно рассматривают как следствие постулата о постоянстве скорости света. Нам неизвестны работы, в которых рассматриваются другие возможные «причины» индефинитности метрики пространства–времени. Настоящая статья, возможно, восполнит существующий пробел.

Ньютоновская механика и специальная теория относительности подробно исследуют связь непрерывных групп симметрий пространства–времени и соответствующих законов сохранения. Дискретные симметрии (по крайней мере, в классических теориях) остаются в стороне.

Ориентируемость пространственно-временного континуума, по-видимому, не противоречит существующей экспериментальной базе. Более того, нарушение закона сохранения четности в слабых взаимодействиях позволяет предположить, что на микроуровне имеются существенные различия между «правым», «левым» и, возможно, наблюдаемым неориентированным пространством–временем. Однако, ориентируемость многообразия – это свойство многообразия «в целом», поэтому ориентируемость должна проявлять себя и на макроуровне.

Известно [1, 2], что если база главного расслоения со структурной группой есть *евклидово* пространство, то минимум функционала действия для калибровочного поля Янга-Миллса достигается на автодуальных решениях уравнений поля. В пространстве Минковского автодуальное калибровочное электромагнитное поле – только нулевое. Поэтому, возможно, целесообразно рассмотреть такое «расширение» понятия пространства–времени, в котором евклидовая метрика входит в структуру расширения равноправно с индефинитной метрикой.

Изменение ориентации многообразия на противоположную означает присутствие на многообразии действия некоторой двухэлементной группы преобразований – зеркальной группы многообразия.

На основе связного, *ориентируемого* многообразия можно построить [1] два различных *ориентированных* многообразия (правая и левая сторона исходного неориентированного многообразия).

Мы предполагаем, что на правой и левой стороне расширенного пространства–времени пространственные и временные координаты неотличимы: метрические тензоры положительно определенные (дефинитные). Положительно определенные метрики на правой и левой стороне, при самых общих требованиях инвариантности относительно представлений зеркальной группы, индуцируют на неориентированном пространстве–времени индефинитную метрику.

В тех ситуациях, когда «правое» неотличимо от «левого», нет необходимости рассматривать расширенную структуру пространства–времени. Но пространство–время едино для всей материи и, кроме того, существуют процессы, чувствительные к ориентации. При описании таких процессов модель дефинитного расширения пространства–времени может оказаться полезной. Так, изучение уравнений классической электродинамики на дефинитном расширении пространства–времени позволяет предположить, что электрический заряд можно рассматривать как наблюдаемое в макромасштабе нарушение симметрии между «правым» и «левым». В предположении компактности электродинамики на двухстороннем расширении пространства–времени это приводит к квантованию электрического заряда без предположения о существовании магнитных монополей.

2. Представления двухэлементной группы. Пара чисел $\{-1,+1\}$, образует группу G_2 (по умножению), называемую двухэлементной группой. Каждое представление $(-1)\mapsto \mathbf{Z},\ (+1)\mapsto \mathbf{I};\ \mathbf{Z},\mathbf{I}: L\to L$ элементов группы G_2 линейными операторами в вещественном линейном пространстве L удовлетворяет условию $\mathbf{Z}^2=\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор в L.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbf{Z}: R^n\to R^n$ – *линейный оператор, такой что* $\mathbf{Z}^2=\mathbf{I}$. *Тогда в* R^n *существует канонический базис из собственных векторов оператора* $\mathbf{Z}$, *в котором матрица оператора имеет вид*

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}-\mathbf{I}_k & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{n-k}\end{pmatrix},\qquad 0\le k\le n. \qquad (1)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть жорданову нормальную форму оператора в вещественном пространстве и воспользоваться соотношением $\mathbf{Z}^2=\mathbf{I}$.Число k в каноническом представлении (1) матрицы оператора $\mathbf{Z}$ будем называть *сигнатурой* представления.Сигнатура $k=0$ соответствует *тождественному* представлению: $(-1),(+1)\mapsto \mathbf{I}$, а $k=n$ – представлению *полной сигнатуры*: $(-1)\mapsto -\mathbf{I},\ (+1)\mapsto \mathbf{I}$.

В пространстве L представление $\{\mathbf{Z},\mathbf{I}\}$ группы G_2 нечетной сигнатуры будем называть *зеркальным представлением.* Тогда группа $\{\mathbf{Z},\mathbf{I}\}$ называется *зеркальной группой* пространства L, а оператор $\mathbf{Z}$ представления – *зеркальным оператором*. Отметим, что для зеркального оператора $\det\mathbf{Z}<0$.Пусть $\{\mathbf{Z}_L,\mathbf{I}\},\ \{\mathbf{Z}_R,\mathbf{I}\}$ – зеркальные группы одинаковой сигнатуры в n-мерных линейных пространствах L и R. Линейный оператор $\mathbf{A}: L\to R$ будем называть *зеркально инвариантным*, если $\mathbf{A}\mathbf{Z}_L=\mathbf{Z}_R\mathbf{A}$.Если $\{\mathbf{Z},\mathbf{I}\}$ – зеркальная группа линейного пространства L, то $\{\mathbf{Z}^*,\mathbf{I}^*\}$ – зеркальная группа сопряженного пространства L^*. Так как метрический тензор $\mathbf{g}$ есть симметрический $(\mathbf{g}^*=\mathbf{g})$ оператор из L в L^*, получаем:

Следствие 1. *Метрический тензор* $\mathbf{g}$ *зеркально инвариантен тогда и только тогда, когда зеркальный оператор* $\mathbf{Z}$ *является изометрией:* $\mathbf{Z}^*\mathbf{g}\mathbf{Z}=\mathbf{g}$.

Если в линейном пространстве L действует зеркальная группа $\{\mathbf{Z},\mathbf{I}\}$, то L единственным образом представляется в виде прямой суммы $L=L_-\dot{+}L_+$ собственных подпространств L_- и L_+ зеркального оператора $\mathbf{Z}$ так, что сужение зеркальной группы на подпространство L_- есть представление полной сигнатуры, а на подпространство L_+ – тождественное представление.

Для зеркально инвариантных операторов имеет место

Утверждение 2. *Пусть оператор* $\mathbf{A}: L\to R$ *зеркально инвариантен относительно зеркальных групп* $\{\mathbf{Z}_L,\mathbf{I}\},\ \{\mathbf{Z}_R,\mathbf{I}\}$ *(сигнатуры* $0<k<n$*) пространств* L *и* R. *Тогда оператор* $\mathbf{A}$ *представим в «блочном» виде*
$\mathbf{A}=\mathbf{A}_1\dot{+}\mathbf{A}_2;\ \ \mathbf{A}_1: L_-\to R_-,\ \mathbf{A}_2: L_+\to R_+,$ *где* $L_-, L_+;\ R_-, R_+$ – *собственные подпространства*

зеркальных операторов $\mathbf{Z}_L$ *и* $\mathbf{Z}_R$, *так что* $L_- \dot{+} L_+ = L,\quad R_- \dot{+} R_+ = R$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть матрицу оператора $\mathbf{A}$ в канонических (для зеркальных операторов $\mathbf{Z}_L$ и $\mathbf{Z}_R$) базисах пространств L и R, и воспользоваться соотношением $\mathbf{A}\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_R\,\mathbf{A}$.

3. Ориентируемые многообразия. C^∞ – дифференцируемое (в дальнейшем – *гладкое*) многообразие $M = \{M, A\}$, построенное на базе хаусдорфового топологического пространства M, называется *ориентированным* [3], если полный атлас A многообразия состоит из таких карт

$$K_\alpha = \{U_\alpha \subseteq M;\ \mathbf{x}_\alpha(N) = (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n):\ U_\alpha \to R^n\},$$

что если $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$, то якобиан отображения

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_\alpha \circ \mathbf{x}_\beta^{-1}:\ \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \subseteq R^n \to R^n$$

положителен.

Если среди якобианов встречаются как положительные, так и отрицательные, то гладкое многообразие $M = \{M, A\}$ называют *неориентированным*. Неориентированное гладкое многообразие $M_0 = \{M, A\}$ называется *ориентируемым многообразием*, если полный атлас A многообразия M_0 содержит полный ориентированный атлас. Если *связное* неориентированное многообразие M_0 – ориентируемо, то его полный атлас A единственным образом представим в виде $A = A_L \bigcup A_R$, где $A_L \neq A_R$ – полные ориентированные атласы на M.

Тогда, отправляясь от исходного *связного ориентируемого многообразия*

$$M_0 = \{M, A\}, \tag{2}$$

на топологическом пространстве M, как на базе, можно построить дополнительно два различных гладких ориентированных многообразия:

$$M_L = \{M, A_L\} \text{ – (левая сторона } M_0); \tag{3}$$

$$M_R = \{M, A_R\} \text{ – (правая сторона } M_0). \tag{4}$$

Каждое линейное пространство, как связное ориентируемое многообразие, допускает точно две ориентации.

Определение 1. *Линейное отображение* $\mathbf{A}: L \to R$ *ориентированных линейных пространств называется отображением переноса ориентации, если для положительно ориентированных базисов* $\{f_k\}$, $\{e_k\}$ *пространств* L *и* R *определитель матрицы* $\mathbf{A}_{\{e,f\}}$ *оператора* $\mathbf{A}$ *– положителен.*

Если для отображения переноса ориентации $\mathbf{A}: L \to R$ «образ» $\{\mathbf{A}\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{f}_n\}$ положительно ориентированного базиса $\{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ из L есть положительно ориентированный базис в R, то пространства L и R считаются *ориентированными одинаково*. В противном случае пространства L и R считаются *ориентированными противоположно*.

Касательные пространства $T_N M_L$ и $T_N M_R$ к ориентированным многообразиям M_L и M_R в точке N оказываются *естественно ориентированными*: если точка N принадлежит карте

$$K = \{U \subseteq M;\ \mathbf{x}(N) = (x^1, \cdots, x^n):\ U \to R^n\},$$

то базис

$$\left\{ \mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_N, \ \cdots,\ \mathbf{e}_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_N \right\}$$

соответствующего касательного пространства, считается, по определению, *положительно ориентированным*. Нетрудно убедиться, что *естественно ориентированные* касательные пространства $T_N M_R$ и $T_N M_L$ *ориентированы противоположно*, поэтому их ориентации будем обозначать символами $T_N M_R^+$ и $T_N M_L^-$.

4. Двухстороннее расширение ориентируемого многообразия. Пусть M_0 – связное, гладкое, неориентированное многообразие. Предполагая, что многообразие M_0 – *ориентируемо*, построим на его основе гладкие *ориентированные* многообразия M_L (3) и M_R (4). Между точками многообразий M_L, M_R и M_0 имеется *естественное* взаимно однозначное соответствие, так как они построены на одной и той же базе – топологическом пространстве M. Для касательных пространств $T_N M_L^-$ и $T_N M_R^+$ также определены *естественные* вложения в касательное пространство $T_N M_0$:

$$\mathbf{l}:\ T_N M_L^- \to T_N M_0, \quad \mathbf{r}:\ T_N M_R^+ \to T_N M_0. \tag{5}$$

В самом деле, так как каждая карта атласа многообразия $M_L(M_R)$ принадлежит атласу многообразия M_0, то каждая кривая на многообразии $M_L(M_R)$ является кривой на M_0. Тогда произвольный вектор касательного пространства $T_N M_L^-$ $(T_N M_R^+)$ является также вектором касательного пространства $T_N M_0$.

Изменение ориентации многообразия на противоположную ориентацию есть действие некоторой двухэлементной группы преобразований – зеркальной группы многообразия.

Определение 2. *Двухсторонним расширением связного, гладкого, ориентируемого многообразия* M_0 *будем называть совокупность* $D = \{M_0, \mathbf{Z}_0;\ M_L, \mathbf{l};\ M_R, \mathbf{r}\}$, *состоящую из:*

– *исходного многообразия* M_0 *с гладкой зеркальной группой* $\{\mathbf{Z}_0(N), \mathbf{I}\}$ *в касательном пространстве* $T_N M_0$*;*

– *гладких многообразий* M_L *(3) и* M_R *(4);*

– *естественных вложений* $\mathbf{l}: T_N M_L^- \to T_N M_0$, $\mathbf{r}: T_N M_R^+ \to T_N M_0$ *(5) касательных пространств.*

Замечание. Отображения $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$, совместно с оператор-функцией $\mathbf{Z}_0(N)$, определяют на M_L и M_R гладкие поля зеркальных операторов $\mathbf{Z}_L(N) = \mathbf{l}^{-1}\mathbf{Z}_0(N)\mathbf{l}$ и $\mathbf{Z}_R(N) = \mathbf{r}^{-1}\mathbf{Z}_0(N)\mathbf{r}$. Причем, по построению, вложения $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ являются зеркально инвариантными операторами: $\mathbf{l}\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_0\mathbf{l}$, $\mathbf{r}\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_0\mathbf{r}$.

Двухстороннее расширение многообразия удобно изображать парой диаграмм

$$\begin{array}{ccc} M_L & \xleftrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & M_R \\ \mathrm{id}\nwarrow\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\swarrow\mathrm{id} \\ & M_0 & \end{array};\qquad \begin{array}{ccc} T_N M_L^- & & T_N M_R^+ \\ \mathbf{l}\searrow & & \swarrow\mathbf{r} \\ & T_N M_0 & \end{array}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать расширения, на которых определен некоторый оператор, согласованный со всеми структурами расширения:

Определение 3. *Двухстороннее расширение* D *связного гладкого ориентируемого многообразия* M_0 *будем называть поляризованным, если задано линейное, обратимое, гладкое, зеркально инвариантное отображение переноса ориентации касательных пространств* $\mathbf{P}(N): T_N M_L^- \to T_N M_R^+$. *Отображение* $\mathbf{P}(N)$ *будем называть оператором поляризации расширения.*

Поляризованное двухстороннее расширение будем обозначать символом $DP = \{D, \mathbf{P}(N)\}$, и изображать диаграммами

$$\begin{array}{ccc} M_L & \xleftrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & M_R \\ \mathrm{id}\nwarrow\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\swarrow\mathrm{id} \\ & M_0 & \end{array};\qquad \begin{array}{ccc} T_N M_L^- & \xrightarrow{\ \mathbf{P}(N)\ } & T_N M_R^+ \\ \mathbf{l}\searrow & & \swarrow\mathbf{r} \\ & T_N M_0 & \end{array}.$$

Если $\mathbf{P}(N) = \mathbf{J}$, где $\mathbf{J} = \mathbf{r}^{-1}\mathbf{Z}_0\,\mathbf{l}$, то поляризацию будем называть *тривиальной*.

5. Двухсторонние метризуемые расширения. Основным объектом изучения в настоящем пункте будут метрики на поляризованном двухстороннем расширении связного гладкого многообразия M_0. Пусть $DP = \{D, \mathbf{P}(N)\}$ – такое расширение. Тогда коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_N M_L^- & \xrightarrow{\ \mathbf{P}\ } & T_N M_R^+ \\ \mathbf{l}\downarrow & & \downarrow\mathbf{r} \\ T_N M_0 & \xrightarrow{\ \mathbf{P}_0\ } & T_N M_0 \end{array} \qquad (6)$$

определяет «образ» $\mathbf{P}_0(N) = \mathbf{r}\mathbf{P}(N)\mathbf{l}^{-1}$ оператора поляризации $\mathbf{P}(N)$ в касательном пространстве $T_N M_0$. Так как все отображения диаграммы (6) – зеркально инвариантны, то $\mathbf{P}_0\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0\mathbf{P}_0$. Изучение оператора поляризации $\mathbf{P}(N)$ удобно проводить в терминах его «образа» $\mathbf{P}_0(N)$.

Если на правой стороне M_R поляризованного расширения DP задана гладкая, зеркально инвариантная метрика $\mathbf{g}(N): T_N M_0 \to T_N^* M_0$ ($\mathbf{Z}_R^*\,\mathbf{g}(N)\,\mathbf{Z}_R = \mathbf{g}(N)$), то расширением DP на левой стороне M_L многообразия M_0 индуцируется зеркально инвариантная метрика $\mathbf{f}(N) = \mathbf{P}^*(N)\mathbf{g}(N)\mathbf{P}(N)$, причем оператор поляризации $\mathbf{P}(N)$ является изометрией (по построению метрики $\mathbf{f}(N)$). Кроме того, при наличии метрики $\mathbf{g}(N)$ на правой стороне M_R, поляризованное расширение DP индуцирует на M_0 отображение $\mathbf{h}(N): T_N M_0 \to T_N^* M_0$, как отображение крайнего левого элемента $T_N M_0$ коммутативной диаграммы (7) в крайний правый элемент $T_M^* M_0$:

$$\begin{array}{ccccc} & & T_N^* M_R^+ & \xrightarrow{\ \mathbf{P}^*\ } & T_N^* M_L^- \xrightarrow{\ \mathbf{l}^{*-1}\ } T_N^* M_0 \\ & & \mathbf{g}\uparrow & & \mathbf{f}\uparrow \\ T_N M_0 & \xrightarrow{\ \mathbf{r}^{-1}\ } & T_N M_R^+ & \xrightarrow{\ \mathbf{P}^{-1}\ } & T_N M_L^- \end{array} \qquad (7)$$

Тогда

$$\mathbf{h}(N) = \mathbf{l}^{*-1}\mathbf{P}^*\mathbf{g}\,\mathbf{r}^{-1} = \mathbf{l}^{*-1}\mathbf{f}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}^{-1}. \qquad (8)$$

Определение 4. *Поляризованное двухстороннее расширение* DP *будем называть метризуемым, если для каждой зеркально инвариантной метрики* $\mathbf{g}(N)$ *на* M_R *отображение* $\mathbf{h}(N)$ *(8) – симметрическое:* $\mathbf{h}(N) = \mathbf{h}^*(N)$, *то есть является метрикой на многообразии* M_0.

Имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы поляризованное двухстороннее расширение* DP *было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы матрица «образа»* $\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}\mathbf{P}\mathbf{l}^{-1}$ *оператора поляризации* $\mathbf{P}(N)$ *в каноническом для зеркального оператора* $\mathbf{Z}_0$ *базисе пространства* $T_N M_0$ *имела вид*

$$\mathbf{P}_0(N) = \begin{pmatrix} \alpha(N)\mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \beta(N)\mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где $\alpha(N) \neq 0,\ \beta(N) \neq 0$ *– гладкие скалярные функции точки* N. *Если, кроме того, многообразие* M_0 *имеет четную размерность, то* $\alpha(N)\cdot\beta(N) < 0$.

Доказательство. Достаточность условия (9) очевидна. Докажем необходимость. Имеем:

$$\mathbf{h} = \mathbf{l}^{*-1}\mathbf{P}^{*}\mathbf{g}\,\mathbf{r}^{-1} = [\mathbf{P}^{*} = \mathbf{l}^{*}\mathbf{P}_0^{*}\mathbf{r}^{*-1}] = \mathbf{P}_0^{*}\mathbf{r}^{*-1}\mathbf{g}\,\mathbf{r}^{-1} = \mathbf{P}_0^{*}\mathbf{H},$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{r}^{*-1}\mathbf{g}\,\mathbf{r}^{-1} : T_N M_0 \to T_N^{*} M_0$ – зеркально инвариантный симметрический обратимый оператор. Тогда соотношение $\mathbf{h}^{*}(N) = \mathbf{h}(N)$ только тогда будет выполняться для *любой* допустимой метрики $\mathbf{g}(N)$, когда $\mathbf{H}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^{*}\mathbf{H}$ для *любого* зеркально инвариантного, симметрического оператора $\mathbf{H}$.

Оператор $\mathbf{P}_0(N) = \mathbf{r}\mathbf{P}(N)\mathbf{l}^{-1}$ – зеркально инвариантный, и значит, по утверждению 2, – блочно-диагональный. Сужения зеркальной группы на соответствующие подпространства есть представление полной сигнатуры и тождественное представление. Инвариантность относительно этих представлений не накладывает на операторы, в частности на оператор $\mathbf{H}$, никаких ограничений. Поэтому, блоки $\mathbf{P}_{0,m}$ $(m = 1,2)$ оператора $\mathbf{P}_0$ должны удовлетворять условию

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_m^{*} : \qquad \mathbf{H}_m \mathbf{P}_{0,m} = \mathbf{P}_{0,m}^{*}\mathbf{H}_m , \quad m = 1,2 .$$

Это возможно только тогда, когда каждый блок кратен тождественному оператору: $\mathbf{P}_{0,1} = \alpha \mathbf{I}_k$, $\mathbf{P}_{0,2} = \beta \mathbf{I}_{n-k}$.

Рассмотрим в пространствах $T_N M_L^{-}$, $T_N M_R^{+}$ и $T_N M_0$ канонические, для операторов $\mathbf{Z}_L$, $\mathbf{Z}_R$ и $\mathbf{Z}_0$, базисы. В этих базисах матрицы оператора поляризации $\mathbf{P}$, тривиальной поляризации $\mathbf{J}$, вложений $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{l} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (10)$$

причем $\det \mathbf{P} > 0$, так как $\mathbf{P}$ – *отображение переноса ориентации*. Если n – четное число, а k (для зеркальных представлений) – число нечетное, то $(n-k)$ – также нечетное число. Тогда, из представления (9):

$$\operatorname{sgn} \alpha\beta = \operatorname{sgn}\det \mathbf{P}_0 = \operatorname{sgn}\det(\mathbf{r}\mathbf{P}\mathbf{l}^{-1}) < 0 ,$$

что и требовалось доказать.

Отметим что, при переносе компонент вектора с $T_N M_L^{-}$ на $T_N M_0$ с помощью вложения $\mathbf{l}$ (10), знаки некоторых компонент заменяются противоположными. На практике это оказывается неудобной операцией, так как, в частности, при переносах меняется вид дифференциальных операторов. Поэтому, при рассмотрении векторных и тензорных полей на левом пространстве M_L двухстороннего метризуемого расширения DP, целесообразно заменить значения полей (элементы ориентированного касательного пространства $T_N M_L^{-}$) их образами в противоположно ориентированном касательном пространстве $T_N M_L^{+} = \mathbf{Z}_L(T_N M_L^{-})$. При такой замене вложение $\mathbf{l}$ заменяется вложением $\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{l}\mathbf{Z}_L$; оператор поляризации $\mathbf{P}$ – оператором $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{Z}_L$; оператор тривиальной поляризации $\mathbf{J}$ – оператором $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J}\,\mathbf{Z}_L$. Двухстороннее метризуемое расширение принимает вид:

$$\begin{array}{ccc} M_L & \xleftrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & M_R \\ \mathrm{id}\nwarrow\!\searrow & & \swarrow\!\nearrow \mathrm{id} \\ & M_0 & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} T_N M_L^{+} & \xrightarrow{\ \tilde{\mathbf{P}}(N)\ } & T_N M_R^{+} \\ \tilde{\mathbf{l}}\searrow & & \swarrow \mathbf{r} \\ & T_N M_0 & \end{array} .$$

В каноническом положительно ориентированном базисе пространства $T_N M_L^{+}$ и соответствующих канонических базисах пространств $T_N M_R^{+}$ и $T_N M_0$ матрицы оператора поляризации $\tilde{\mathbf{P}}$, тривиальной поляризации $\tilde{\mathbf{J}}$, и вложений $\tilde{\mathbf{l}}, \mathbf{r}$ имеют представления

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{l}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix} \end{aligned}, \qquad (11)$$

что позволяет не следить за знаками компонент полей при переносе полей с многообразия M_0, как на многообразие M_R, так и на многообразие M_L.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что в двухсторонних метризуемых расширениях используются ориентированные касательные пространства $T_N M_L^{-}$, $T_N M_R^{+}$, а операторы $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{l}}, \mathbf{r}$ (11) будем, по-прежнему, обозначать символами без тильды: $\mathbf{P}, \mathbf{J}, \mathbf{l}, \mathbf{r}$.

6. Дефинитное расширение пространственно-временного континуума. Предполагая, что пространственно-временной континуум M_0 есть 4-мерное, связное, гладкое, ориентируемое многообразие, рассмотрим его *двухстороннее метризуемое расширение*.

Определение 5. *Двухстороннее метризуемое расширение пространственно-временного континуума с фиксированной зеркально инвариантной положительно определенной метрикой на правой стороне будем называть дефинитным расширением пространства – времени.*

Замечание. Из теоремы 1 следует, что каждое дефинитное расширение пространства–времени однозначно определяется выбором зеркально инвариантной положительно определенной метрики $\mathbf{g}(N)$ на правой стороне и пары гладких функций $\alpha = \alpha(\mathrm{N}),\ \beta = \beta(\mathrm{N})$, удовлетворяющих условию $\alpha(\mathrm{N})\cdot\beta(\mathrm{N})<0$.

Теорема 2. *Дефинитное расширение пространства–времени индуцирует на неориентированном пространственно-временном континууме* M_0 *индефинитную, зеркально инвариантную метрику с сигнатурой* $(+,-,-,-)$, *или* $(-,+,+,+)$.

Доказательство. Очевидно, что отображение $\mathbf{h}^*(\mathrm{N}) = \mathbf{h}(\mathrm{N}):\ \mathrm{T_N M_0} \to \mathrm{T_N^* M_0}$, определяемое диаграммой (7), зеркально инвариантное. Кроме того, $\mathbf{h}(\mathrm{N})$ представляется в виде $\mathbf{h}(\mathrm{N}) = \mathbf{P}_0^*(\mathrm{N})\mathbf{H}(\mathrm{N})$, где $\mathbf{H} = \mathbf{r}^{*^{-1}}\mathbf{g}\,\mathbf{r}^{-1}:\ \mathrm{T_N M_0} \to \mathrm{T_N^* M_0}$ – положительно определенный, зеркально инвариантный оператор. Учитывая, что зеркальная группа в четырехмерном пространстве имеет сигнатуру $\mathrm{k}=1$ или $\mathrm{k}=3$, получаем, что в каноническом базисе пространства $\mathrm{T_N M_0}$ метрика $\mathbf{h}(\mathrm{N})$ представима в виде

$$\mathbf{h}(\mathrm{N}) = \begin{pmatrix} \alpha(\mathrm{N})\mathbf{H}_0 & 0 \\ 0 & \beta(\mathrm{N})\mathbf{H}_1 \end{pmatrix},$$

где диагональные блоки – первого и третьего порядков. Учитывая, что $\mathbf{H}_0>0,\ \mathbf{H}_1>0$ и $\alpha(\mathrm{N})\cdot\beta(\mathrm{N})<0$, получаем утверждение теоремы.

7. Дефинитные расширения пространства Минковского. Представляет интерес описать все дефинитные расширения пространства Минковского. Метрика плоского пространства – времени Минковского M_0 – зеркально инвариантная. Метрика $\mathbf{h}(\mathrm{N})$ и зеркальный оператор $\mathbf{Z}_0(\mathrm{N}):\mathrm{T_N M_0}\to\mathrm{T_N M_0}$, в стандартных координатах $\mathrm{ct,x,y,z}$, имеют вид

$$\mathbf{h}(\mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{Z}_0(\mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим двухстороннее метризуемое расширение пространства Минковского

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M_L} & \xleftrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & \mathrm{M_R} \\ \mathrm{id}\nwarrow & & \nearrow\mathrm{id} \\ & \mathrm{M_0} & \end{array}\quad;\quad \begin{array}{ccc} \mathrm{T_N M_L^+} & \xrightarrow{\ \mathbf{P}(\mathrm{N})\ } & \mathrm{T_N M_R^+} \\ \tilde{\mathbf{l}}\searrow & & \swarrow\mathbf{r} \\ & \mathrm{T_N M_0} & \end{array}\ .$$

где $\mathbf{id},\mathbf{l},\mathbf{r}$ – естественные вложения, $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathrm{N})$ – оператор поляризации.

Оператор $\mathbf{P}_0(\mathrm{N})$ определим соотношением (9), приняв $\alpha(\mathrm{N})>0,\ \beta(\mathrm{N})<0$. Тогда матрица оператора поляризации $\mathbf{P}(\mathrm{N})$ в канонических базисах пространств $\mathrm{T_N M_L^+}$ и $\mathrm{T_N M_R^+}$, в соответствие с (6), имеет вид

$$\mathbf{P}(\mathrm{N}) = \mathbf{r}^{-1}\mathbf{P}_0(\mathrm{N})\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \alpha(\mathrm{N}) & 0 \\ 0 & \beta(\mathrm{N})\mathbf{I}_3 \end{pmatrix}.$$

Зеркально инвариантная метрика $\mathbf{h}(\mathrm{N})$ на M_0 *задана*. Тогда, в соответствие с диаграммой (7), двухсторонним метризуемым расширением однозначно определяются метрики $\mathbf{g}(\mathrm{N})$ и $\mathbf{f}(\mathrm{N})$:

$$\mathbf{g}(\mathrm{N}) = \mathbf{P}^{*^{-1}}\mathbf{l}^*\mathbf{h}\,\mathbf{r} = \begin{pmatrix} |\alpha|^{-1} & 0 \\ 0 & |\beta|^{-1}\mathbf{I}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathrm{N}) = \mathbf{l}^*\mathbf{h}\,\mathbf{r}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} |\alpha| & 0 \\ 0 & |\beta|\mathbf{I}_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что дефинитное расширение пространства Минковского *не единственно*: евклидовые метрики (на левой и правой стороне) зависят от двух произвольных параметров $\alpha(\mathrm{N})$ и $\beta(\mathrm{N})$. В простейшем случае, когда $|\alpha(\mathrm{N})| = |\beta(\mathrm{N})| = 1$, дефинитное расширение полностью симметрично (левая метрика «совпадает» с правой метрикой, а поляризация тривиальная). При нарушении симметрии между правым и левым, то есть при нетривиальной поляризации, требуется, в каждом конкретном случае, выяснять физический смысл скалярных функций $\alpha(\mathrm{N})$ и $\beta(\mathrm{N})$.

8. Квантование электрического заряда. В работах [4–6], нами фактически изучались уравнения классической электродинамики ([7]) на дефинитном расширении пространства – времени. В отсутствие свободных зарядов и токов эти уравнения принимают наиболее простой, симметричный вид:

$$\begin{cases} \mathrm{dF_R} = 0; \\ \mathrm{dF_L} = 0; \end{cases}\qquad \mathrm{F_L} = \tau\mathrm{F_R}\,, \tag{12}$$

где: $\mathrm{F_R}$ – образ 2-формы F электромагнитного поля на $\mathrm{M_R}$; τ – обобщение оператора Ходжа τ_0 ([1], [8]) на дефинитное расширение пространства – времени; d – операция внешнего дифференцирования форм.

Как показано в [4], однородные уравнения (12) на дефинитном расширении пространства Минковского эквивалентны «формально неоднородным» уравнениям на 2-форму F

$$\begin{cases} \mathrm{dF} = 0; \\ \mathrm{d}(\tau_0\mathrm{F}) = -(\mathrm{d}\ln\varepsilon)\wedge(\tau_0\mathrm{F}), \end{cases} \tag{13}$$

в пространстве Минковского. Здесь τ_0 – оператор Ходжа на пространстве Минковского, а $\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{N}) = \sqrt{|\alpha\beta^3|}$ зависит от выбора дефинитного расширения пространства Минковского и проявляет себя как относительная электрическая проницаемость вакуума. При этом относительная магнитная проницаемость $\mu(\mathrm{N}) = \varepsilon^{-1}(\mathrm{N})$, что обеспечивает постоянную скорость распространения электромагнитных взаимодействий. Таким образом, при *нарушении симметрии между правым и левым* (в дефинитном расширении M_0), на неориентированном пространстве – времени M_0, как следствие «поляризации» вакуума, *появляются* электрические заряды и токи. Тогда, предположительно, электрические заряды есть наблюдаемое в макро масштабе нарушение симметрии между правым и левым на двухстороннем расширении пространства – времени. В дальнейшем, не ограничивая общности, можно рассматривать расширения, для которых $|\alpha(\mathrm{N})| = |\beta(\mathrm{N})| = \sqrt{\varepsilon(\mathrm{N})}$.

Отметим, что метрики на правой и левой стороне двухстороннего расширения пространства Минковского могут иметь особенности. В частности, если в некоторой изолированной точке N_0 одна из метрик обращается в ∞, то точка N_0 становится бесконечно удаленной. Тем самым, на соответствующей стороне, «выкалывается» точка N_0. (При этом вторая метрика в этой же точке обращается в 0, и «топология» соответствующей стороны не изменяется).

Пусть 2-формы $\mathrm{F_R}$ и $\mathrm{F_L}$ есть 2-формы кривизны связностей θ_R и θ_L в главном расслоении со структурной группой $\mathrm{U}(1)$ над базой – двухсторонним расширением пространства Минковского. Рассмотрим стационарный случай. Если «выкалывается» точка на правой стороне, то имеем квантованный «монополь» Дирака ([1]). Если «выкалывается» точка на левой стороне, то имеем квантованный электрический заряд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*. М.: Наука. – 1979. – 759 с.
2. Коноплева Н.П., Попов В.Н. *Калибровочные поля*. М.: Атомиздат. – 1972. – 240 с.
3. Кобаяси Ш., К. Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1. М.: Иностранная литература. – 1981. – 344 с.
4. Бессмертный М.Ф., Болтоносов А.И. Моделирование электрического заряда, спина, массы и магнитного момента в классической электродинамике. *Вестник Харьковского национального университета*, *сер. МИА*, N 14 (925). – 2010. – С.13–19.
5. Бессмертный М.Ф., Болтоносов А.И. О решениях системы уравнений Максвелла специального вида. Заряд, спин и масса в классической электродинамике. *Современные проблемы математики, механики и информатики*. Харьков: «Апостроф». – 2011. – С. 314–323.
6. Bessmertniy M.F., Boltonosov A.I. Solutions of Maxwell equations of special kind. Charge, spin and mass in classical electrodynamics . *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences.* Kharkov: «Apostrof». – 2011. – P.204–212.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука. – 2003, – 536 с.
8. Булдырев В.С, Б.С. Павлов Б.С. *Линейная алгебра и функции многих переменных.* Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. – 1985, – 496 с.