УДК 512.552

(0,1)−ПОРЯДКИ И ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Цюпий Т.И.

НУБиП Украины, Киев, Украина

Исследуется строение (0,1)-порядков и их колчанов с помощью частично упорядоченных множеств. Установлен вид разложения Пирса приведённого (0,1)-порядка. Введена конструкция, которая позволяет по диаграмме произвольного конечного частично упорядоченного множества строить сильно связный колчан без кратных стрелок и доказано, что полученный колчан совпадает с колчаном соответствующего (0,1)-порядка.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: (0,1)-порядки, колчаны, стрелки, частично упорядоченные множества.

(0,1) -ПОРЯДКИ І ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

Цюпій Т.І.

Досліджується будова (0,1)-порядків і їх сагайдаків за допомогою частково впорядкованих множин. Встановлено вид розкладання Пірса приведеного (0,1)-порядка. Введена конструкція, яка дозволяє по діаграмі довільної скінченої частково впорядкованої множини будувати сильно зв'язний сагайдак без кратних стрілок і доведено, що отриманий сагайдак збігається з сагайдаком відповідного (0,1)-порядка.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: (0,1)-порядки, сагайдаки, стрілки, частково впорядковані множини.

(0,1) -ORDERS AND PARTIALLY ORDERED SETS

Tsiupii T.I.

The structure of (0,1)-orders and their quivers is studied with assistance of partially ordered sets. The type of Pierce decomposition of the (0,1)-order. The construction that allows building a strongly connected quiver without multiple points from the chart of arbitrary finite partially ordered set is introduced. It is shown the built quiver coincides with the quiver of corresponding (0,1)-order.

KEYWORDS: (0,1)-order, quivers, arrows, partially ordered sets.

1. Введение. В последнее время бурно развивается теория представлений конечномерных алгебр. Разработанные в этой теории мощные конструктивные методы все больше используются в других областях математики, в частности, в теории представлений различных алгебраических структур, в теории колец. В данной работе исследуется строение (0,1)-порядков и их колчанов с помощью частично упорядоченных множеств. Используются методы теории колчанов и теории колец и модулей. Важной особенностью работы является использование методов компьютерной алгебры.

2. Основные результаты. Пусть $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ – черепичный порядок над дискретно нормированным кольцом ϑ с матрицей показателей $\varepsilon(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, где α_{ij} – целые и $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всех i, j, k (эти соотношения называются кольцевыми неравенствами), $\alpha_{ii} = 0$ для всех i [1]. Для удобства будем говорить “порядок”, считая, что это черепичный порядок.

Отметим, что при изучении черепичных порядков достаточно рассматривать только приведённые порядки, для матриц показателей которых $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех $i \neq j$. Поэтому будем предполагать, что порядок Λ − приведённый, т.е. факторкольцо Λ / R есть прямым произведением тел.

Две матрицы показателей называются *эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой преобразованиями следующих двух видов: вычитанием целого числа от всех элементов некоторой строки с одновременным прибавлением этого числа ко всем элементам столбца с таким же номером; одновременной перестановкой двух строк и двух столбцов с одинаковыми номерами.

Отметим, что любая матрица показателей эквивалентна некоторой матрице показателей с неотрицательными элементами.

Черепичный порядок $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ называется (0,1)-порядком, если матрица показателей $\varepsilon(\Lambda)$ является (0,1)-матрицей.

Каждому такому (0,1)-порядку Λ поставим в соответствие частично упорядоченное множество $S(\Lambda)$ из n элементов $S(\Lambda) = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ с отношением порядка $\le$, которое определяется следующим образом: $a_i \le a_j \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0$.

Наоборот, если есть конечное частично упорядоченное множество $S = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ с отношением порядка $\le$ и дискретно нормированное кольцо ϑ, то можно построить (0,1)-порядок $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ по правилу

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \le a_j, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Приведем определение ширины частично упорядоченного множества. *Шириной* частично упорядоченного множества S называется максимально возможное число элементов подмножества множества S, которое состоит из попарно несравнимых элементов, если это число конечное. Обозначение ширины S − $w(S)$.

Теорема 1. Пусть Λ – приведённый (0,1)-порядок. Тогда с точностью до эквивалентности его матрица показателей $\varepsilon(\Lambda)$ имеет вид:

$$\varepsilon(\Lambda) = \begin{pmatrix} H_{n_1} & R_{12} & \cdots & R_{1t} \\ R_{21} & H_{n_2} & \cdots & R_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{t1} & R_{t2} & \cdots & H_{n_t} \end{pmatrix},$$

где $$H_{n_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n_i},$$

$t = w(S(\Lambda))$ – ширина соответствующего частично упорядоченного множества $S(\Lambda)$, R_{kl}, $k, l = \overline{1, t}$, $k \ne l$, – (0,1)-матрицы размерности $n_k \times n_l$ такие, что произвольный элемент β_{ij} матрицы R_{kl} и элемент γ_{ji} матрицы R_{lk} удовлетворяют условию $\beta_{ij} + \gamma_{ji} > 0$.

При доказательстве теоремы 1 используется теорема Дилуорса [2].

Теорема 2 (Дилуорса). Минимальное число непересекающихся цепей, которые в совокупности содержат все элементы частично упорядоченного множества S, равно максимально возможному числу элементов подмножества множества S, которое состоит из попарно несравнимых элементов, если это число конечное.

Доказательство теоремы 1. Пусть ширина частично упорядоченного множества $S(\Lambda)$, которое соответствует (0,1)-порядку Λ, равна t и n_1, n_2,..., n_t – число элементов 1-й, 2-й, ..., t-й цепей ($n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$). Пронумеруем элементы $S(\Lambda)$ следующим образом: сначала элементы первой цепи от 1-ого до n_1-ого, потом элементы второй цепи от $n_1 + 1$-ого до $n_1 + n_2$-ого и так далее.

Тогда (0,1)-порядок Λ будет иметь такую матрицу показателей:

$$\varepsilon(\Lambda) = \begin{pmatrix} H_{n_1} & R_{12} & \ldots & R_{1t} \\ R_{21} & H_{n_2} & \ldots & R_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ R_{t1} & R_{t2} & \ldots & H_{n_t} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы H_{n_i} соответствуют цепям, то они имеют вид

$$H_{n_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n_i}.$$

По условию порядок Λ – приведённый, т.е. матрица $\varepsilon(\Lambda)$ не имеет симметричных нулей. Поэтому для произвольного элемента β_{ij} матрицы R_{kl} и соответствующего элемента γ_{ji} матрицы R_{lk} справедливо неравенство $\beta_{ij} + \gamma_{ji} > 0$.

Теорема доказана.

Приведем определение колчана Габриеля для кольца.

Пусть A – нётерово справа полусовершенное кольцо, R – его радикал Джекобсона, P_1, P_2, … , P_n – все попарно неизоморфные неразложимые проективные модули. Пусть проективное накрытие $P(P_iR)$ модуля P_iR имеет вид:

$$P(P_iR) = \bigoplus_{j=1}^{n} P_j^{t_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Сопоставим модулям P_1, P_2, … , P_n точки (вершины) $1, 2, \ldots, n$ и соединим вершину i с вершиной j t_{ij} стрелками.

Полученный граф называется колчаном нётерова справа полусовершенного кольца A и обозначается $Q(A)$.

Пусть $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ – приведённый черепичный порядок с колчаном $Q(\Lambda)$. Известно, что такой колчан является сильно связным ориентированным графом без кратных стрелок, а матрица смежности колчана $Q(\Lambda)$ равна разнице матриц показателей квадрата радикала и радикала Джекобсона порядка Λ:

$$[Q(\Lambda)] = \varepsilon(R^2) - \varepsilon(R).$$

Напомним, что колчан называется сильно связным, если существует путь между каждыми двумя его вершинами. Кроме того, одна вершина без петель также считается сильно связным колчаном.

Приведем определение диаграммы конечного частично упорядоченного множества.

Пусть $S=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ − конечное частично упорядоченное множество с отношением порядка $\le$. *Диаграмма* S − это колчан Q(S) с множеством вершин $VQ(S)=\{1,2,\ldots n\}$ и множеством стрелок $AQ(S)=\{\sigma\}$ таким, что в AQ(S) есть стрелка $\sigma: i\to j$ ($i\ne j$) тогда и только тогда, когда $a_i\le a_j$ и не существует элемента $a_k\in S$ такого, что $a_i\le a_k\le a_j$, где $a_k\ne a_i$, $a_k\ne a_j$.

Заметим, что колчан Q(S) не имеет ориентированных циклов, в частности петель, т.е. Q(S) − ациклический колчан без кратных стрелок. Стрелка $\sigma: i\to j$ ациклического колчана Q называется лишней, если существует путь из вершины i в вершину j длины большей, чем 1.

Утверждение. Пусть Q − ациклический колчан без кратных и лишних стрелок. Тогда Q является диаграммой конечного частично упорядоченного множества. Наоборот, диаграмма Q(S) конечного частично упорядоченного множества S является ациклическим колчаном без кратных и лишних стрелок.

Введём конструкцию, которая позволяет по диаграмме Q(S) произвольного конечного частично упорядоченного множества $S=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ строить сильно связный колчан без кратных стрелок.

Обозначим через S_{max} множество всех максимальных элементов частично упорядоченного множества S, через S_{min} – множество всех минимальных элементов S, через $S_{max}\times S_{min}$ – их декартово произведение, а через $\tilde{Q}(S)$ – колчан, который получается из диаграммы Q(S) присоединением стрелок $\sigma_{ij}: a_i\to a_j$ для всех $(a_i,a_j)\in S_{max}\times S_{min}$.

Понятно, что $\tilde{Q}(S)$ является сильно связным колчаном без кратных стрелок.

Черепичный (0,1)-порядок, который соответствует частично упорядоченному множеству S, будем обозначать $\Lambda(S)$.

Теорема 3. Колчан $Q(\Lambda(S))$ совпадает с колчаном $\tilde{Q}(S)$.

Доказательство. Напомним, что $[Q(\Lambda)]=\varepsilon(R^2)-\varepsilon(R)$.

Пусть диаграмма Q(S) имеет стрелку из вершины s в вершину t. Это означает, что $\alpha_{st}=0$ и нет такого номера k ($k\ne s,t$), что $\alpha_{sk}=0$ и $\alpha_{kt}=0$. Элементы β_{ss} и β_{tt} матрицы показателей $\varepsilon(R)=(\beta_{ij})$ равны 1. Пусть $\varepsilon(R^2)=(\gamma_{ij})$. Поскольку $\beta_{ij}=\alpha_{ij}$ при $i\ne j$, то $\gamma_{st}=\min\limits_{1\le k\le n}\{\beta_{sk}+\beta_{kt}\}=1$. Поэтому $\beta_{st}=\alpha_{st}=0$ и $\gamma_{st}=1$. Следовательно, колчан $Q(\Lambda(S))$ имеет стрелку из вершины s в вершину t.

Пусть $a_p\in S_{max}$. Тогда $\alpha_{pk}=0$ только в случае $k=p$. Поэтому p-тая строка матрицы $\varepsilon(R)$ состоит из единиц, т.е. $(\beta_{p1},\ldots,\beta_{pp},\ldots,\beta_{pn})=(1,\ldots,1,\ldots,1)$. Аналогично, если $a_q\in S_{min}$, то q-й столбец $(\beta_{1q},\ldots,\beta_{qq},\ldots,\beta_{nq})^T$ матрицы $\varepsilon(R)$ равен $(1,\ldots,1,\ldots,1)^T$. Поэтому $\gamma_{pq}=2$ и, следовательно, в $Q(\Lambda(S))$ есть стрелка из вершины p в вершину q.

Таким образом, мы доказали включение $\tilde{Q}(S)\subseteq Q(\Lambda(S))$.

Докажем обратное включение. Допустим, что $\gamma_{pq}=2$. Тогда, очевидно,

$$(\beta_{p1},\ldots,\beta_{pp},\ldots,\beta_{pn})=(1,\ldots,1,\ldots,1)$$

и $$(\beta_{1q},\ldots,\beta_{qq},\ldots,\beta_{nq})^T=(1,\ldots,1,\ldots,1)^T,$$

откуда вытекает, что $a_p\in S_{max}$, $a_q\in S_{min}$ и есть стрелка из вершины p в вершину q.

Пусть $\gamma_{pq}=1$ и $\beta_{pq}=0$. Поскольку $\gamma_{pq}=\min\limits_{1\le k\le n}\{\beta_{pk}+\beta_{kq}\}=1$, то $\beta_{pk}+\beta_{kq}\ge 1$ для каждого $k=1,2,\ldots,n$. При $k=p$ и $k=q$ имеем $\beta_{pp}+\beta_{pq}=\beta_{pq}+\beta_{qq}=1$. Поэтому можно считать, что $k\ne p,q$. Следовательно, $\beta_{pq}=\alpha_{pq}=0$, т.е. $a_p\le a_q$ и неравенство $\alpha_{pk}+\alpha_{kq}\ge 1$ означает, что в диаграмме Q(S) есть стрелка из вершины p в вершину q.

Это доказывает включение $Q(\Lambda(S))\subseteq\tilde{Q}(S)$.

Следовательно, $Q(\Lambda(S))=\tilde{Q}(S)$.

Теорема доказана.

3. Выводы. Из приведённой выше процедуры построения колчана (0,1)-порядка по диаграмме соответствующего частично упорядоченного множества и теоремы 3 вытекают следующие утверждения:

1. Число петель колчана (0,1)-порядка равно числу элементов соответствующего частично упорядоченного множества, которые являются одновременно минимальными и максимальными или равно числу изолированных вершин диаграммы соответствующего частично упорядоченного множества.

2. Колчан (0,1)-порядка не имеет петель тогда и только тогда, когда соответствующее частично упорядоченное множество не имеет элементов, которые являются одновременно минимальными и максимальными или диаграмма соответствующего частично упорядоченного множества не имеет изолированных вершин.

3. Для произвольного натурального m ($m \geq 2$) не существует (0,1)-порядка, колчан которого имеет m вершин и $m-1$ петлю.

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы для развития методов теории колчанов в современной структурной теории колец. Некоторые из них могут использоваться при чтении спецкурсов по алгебре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цюпий Т.И. Колчаны и индексы полумаксимальных колец. *Известия Гомельского государственного университета*. – 2001. – Вып.3(6). – С.114–123.
2. Холл М. *Комбинаторика*. − М.: Мир, 1970. − 424с.