УДК 512.552

ОГРАНИЧЕНИЯ В КОЛЧАНАХ МАТРИЦ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Цюпий С.И.

МАУП, Киев, Украина

Введено понятие ассоциированных вершин в колчане матрицы показателей и установлены ограничения на общее число входящих и выходящих стрелок в таких вершинах. Получены ограничения на максимальное количество стрелок колчана с заданным количеством петель. Установлено ограничение на количество стрелок, при котором каждая вершина колчана должна иметь петлю. Получены ограничения на число простых ориентированных циклов колчана матрицы показателей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: матрицы показателей, колчаны, стрелки, ориентированные циклы.

ОБМЕЖЕННЯ В КОЛЧАНОАХ МАТРИЦЬ ПОКАЗНИКІВ

Цюпій С.І.

Введено поняття асоційованих вершин в сагайдаку матриці показників і встановлені обмеження на загальне число стрілок, які входять і виходять з таких вершин. Отримано обмеження на максимальну кількість стрілок сагайдака із заданою кількістю петель. Встановлено обмеження на кількість стрілок, при якому кожна вершина сагайдака повинна мати петлю. Отримано обмеження на число простих орієнтованих циклів сагайдака матриці показників.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: матриці показників, сагайдаки, стрілки, орієнтовані цикли.

LIMITATIONS ON QUIVERS OF MATRIXES OF INDICATORS

Tsiupii S.I.

The concept of associated nodes in the quiver of the matrix of indicators is introduced and the limits on the total number of incoming and outgoing arrows in such vertices is set. The restriction on the maximum number of arrows of the quiver of a predetermined number of loops is obtained. The limitation on the number of arrows in which each vertex must have a quiver loop is found. The restrictions on the number of simple directed cycles in the quiver of the matrix of indicators is obtained.

KEY WORDS: matrix of indicators, quivers, arrows, oriented cycles.

1. Введение. Понятие матрицы показателей возникло в теории колец. В прикладных задачах матрицы показателей применяют для планирования многофакторных экспериментов с заданными условиями оптимальности, для построения кодов и т.п. С каждой матрицей показателей можно связать некоторый граф (колчан) и изучать матрицы показателей методами теории графов. Понятие колчана ввел П. Габриель в связи с классификацией конечномерных алгебр с нулевым квадратом радикала. Колчан приведённой матрицы показателей является простым сильно связным ориентированным графом, но не каждый такой граф является колчаном некоторой матрицы показателей [1]. В данной работе вводится понятие ассоциированных вершин в колчане и устанавливаются ограничения на число стрелок, петель и циклов колчанов матриц показателей.

Важной особенностью работы является широкое использование методов компьютерной алгебры. Автором разработаны компьютерные программы, с помощью которых построено около двух тысяч примеров матриц показателей и их колчанов. Гипотезы про свойства колчанов матриц показателей базировались на анализе этих примеров, на них также проверялись полученные результаты.

2. Основные результаты. Пусть $M_n(Z)$ − кольцо квадратных матриц порядка n над кольцом целых чисел.

Матрица $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ из кольца $M_n(Z)$ называется *матрицей показателей*, если выполняются следующие условия:

(i) $\alpha_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$;

(ii) $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всех $i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

Соотношения (ii) называют кольцевыми неравенствами.

Матрица показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ называется *приведённой*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех $i \neq j$.

Отметим, что при изучении матриц показателей достаточно рассматривать только приведённые матрицы показателей.

Пусть ε – приведённая матрица показателей, E – единичная матрица. Обозначим $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + \mathrm{E} = (\beta_{ij})$, $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, где $\gamma_{ij} = \min_k \left\{\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij}\right\}$.

Граф Q называется *колчаном* матрицы показателей ε, если матрица смежности Q равна $\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$.

Две матрицы показателей называются *эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой преобразованиями следующих двух видов:

1) вычитанием целого числа от всех элементов некоторой строки с одновременным прибавлением этого числа ко всем элементам столбца с таким же номером;
2) одновременной перестановкой двух строк и двух столбцов с одинаковыми номерами.

Отметим, что любая матрица показателей эквивалентна некоторой матрице показателей с неотрицательными элементами. Отметим также, что при первом преобразовании колчан матрицы показателей не изменяется, а при втором преобразовании изменяется только нумерация вершин колчана, а вид колчана не изменяется.

Заметим, что одному колчану может соответствовать бесконечное число матриц показателей.

При изучении колчанов будем считать петлю стрелкой, которая соединяет вершину с собой.
В данной работе устанавливаются ограничения, которым должны удовлетворять колчаны приведённых матриц показателей.

Пусть $Q(\varepsilon)$ – колчан некоторой матрицы показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$.

Введем понятие ассоциированных вершин в колчане.

Определение. Будем называть вершины u и v $(u \neq v)$ колчана $Q(\varepsilon)$ *ассоциированными с равенством* $\alpha_{uv} + \alpha_{vu} = 1$ (или *ассоциированными*), если для элементов α_{uv} и α_{vu} матрицы показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ это равенство справедливо.

Заметим, что колчан $Q(\varepsilon)$ одновременно в ассоциированных вершинах не имеет петель, каждая вершина колчана, в которой нет петли, ассоциирована с некоторой другой вершиной и может быть ассоциированной с несколькими разными вершинами.

Для произвольной вершины u колчана обозначим через $\mathrm{od}\,(u)$ и $\mathrm{id}\,(u)$ количество стрелок, которые выходят и, соответственно, входят в вершину u.

Теорема 1. *Пусть* $Q(\varepsilon)$ *– колчан некоторой матрицы показателей* ε*, у которого вершины* u *и* v *ассоциированы. Тогда*

$$\mathrm{od}\,(u) + \mathrm{od}\,(v) \le n; \quad \mathrm{id}\,(u) + \mathrm{id}\,(v) \le n,$$

где n $(n \ge 2)$ *– количество вершин колчана* $Q(\varepsilon)$.

Доказательство. Случай $n = 2$ тривиальный. Пусть $n \ge 3$ и пусть $\varepsilon = (\alpha_{ij})$, $[Q(\varepsilon)] = (q_{ij})$.

Поскольку вершины u и v колчана $Q(\varepsilon)$ ассоциированы, то колчан $Q(\varepsilon)$ не имеет петель в вершинах u, v и справедливо равенство $\alpha_{uv} + \alpha_{vu} = 1$, т.е. или $\alpha_{uv} = 1$ и $\alpha_{vu} = 0$, или $\alpha_{vu} = 1$ и $\alpha_{uv} = 0$.

Пусть $\alpha_{uv} = 1$ и $\alpha_{vu} = 0$. Используя кольцевые неравенства, получим $\alpha_{vk} \le \alpha_{uk} \le \alpha_{vk} + 1$ для всех $k \notin \{u, v\}$, т.е., учитывая целочисленность матрицы $Q(\varepsilon)$, или $\alpha_{vk} = \alpha_{uk}$, или $\alpha_{uk} = \alpha_{vk} + 1$, откуда следует, что или $q_{uk} = 0$, или $q_{vk} = 0$ для всех $k \notin \{u, v\}$. Следовательно, $q_{uk} + q_{vk} \le 1$ для всех $k \notin \{u, v\}$, откуда, учитывая, что $q_{uu} + q_{vv} = 0$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (q_{uk} + q_{vk}) = \sum_{k=1}^{n} q_{uk} + \sum_{k=1}^{n} q_{vk} = \mathrm{od}\,(u) + \mathrm{od}\,(v) \le n .$$

Аналогично

$$\sum_{k=1}^{n} (q_{ku} + q_{kv}) = \mathrm{id}\,(u) + \mathrm{id}\,(v) \le n .$$

В случае $\alpha_{vu} = 1$ и $\alpha_{uv} = 0$ доказательство аналогичное.

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема дает максимальное количество стрелок колчана с заданным количеством петель.

Теорема 2. *Пусть* $Q(\varepsilon)$ *– колчан некоторой матрицы показателей* ε*, который имеет* n *вершин и* m *петель* $(n \ge 3; 0 \le m \le n-2)$*,* K *– количество стрелок (включая петли) колчана* $Q(\varepsilon)$*. Тогда*

$$K \le n^2 - 3n + m + 4 . \quad (1)$$

Доказательство. Случай $n = 2$ тривиальный. Пусть $n \ge 3$. Рассмотрим произвольные две вершины колчана $Q(\varepsilon)$, которые не имеют петель и ассоциированы. При этом в колчане $Q(\varepsilon)$ из всех возможных стрелок обязательно отсутствуют $2n - 2$ стрелки. Учитывая отсутствие в колчане ещё $n - m - 2$ петель, получим

$$K \le n^2 - (2n-2) - (n-m-2) = n^2 - 3n + m + 4 .$$

Теорема 2 доказана.

Следующий пример показывает, что при $n = 4$ оценка (1) точная.

Пример. Для следующих матриц показателей ε_1, ε_2, ε_3 оценка (1) является равенством:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ [Q(\varepsilon_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$n = 4$; $m = 0$; $K = 8$;

$$n^2 - 3n + m + 4 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 0 + 4 = 8;$$

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ [Q(\varepsilon_2)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$n = 4$; $m = 1$; $K = 9$;

$$n^2 - 3n + m + 4 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 + 4 = 9;$$

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ [Q(\varepsilon_3)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$n = 4$; $m = 2$; $K = 10$;

$$n^2 - 3n + m + 4 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 + 4 = 10.$$

Следующая теорема дает количество стрелок, при котором каждая вершина колчана должна иметь петлю.

Теорема 3. *Пусть* $Q(\varepsilon)$ *– колчан некоторой матрицы показателей* $\varepsilon = (\alpha_{ij})$*, который имеет* n *вершин и* m *петель* $(n \ge 3; 0 \le m \le n)$*,* K_1 *– количество стрелок (не считая петли) колчана* $Q(\varepsilon)$*. Если*

$$K_1 > n^2 - 3n + 4,$$

то петля есть в каждой вершине (т.е. $m = n$ *и* $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 1$ *для всех* i, j*).*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что при $m \le n - 2$ количество стрелок (не считая петли) колчана $Q(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $K_1 \le n^2 - 3n + 4$. Учитывая, что колчан с n вершинами не может иметь $n - 1$ петлю [1], получаем, что при $K_1 > n^2 - 3n + 4$ колчан $Q(\varepsilon)$ имеет петлю в каждой вершине (т.е. $m = n$ и $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 1$ для всех i, j [2]).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Обозначим через* G *простой ориентированный граф, который имеет* n *вершин, петли в* m *вершинах* $(n \ge 3, 0 \le m \le n)$ *и у которого из любой вершины есть стрелка в любую другую вершину. Граф* G *является колчаном некоторой матрицы показателей тогда и только тогда, когда* $m = n$.

Доказательство. *Достаточность.* Рассмотрим граф G, матрицей смежностей которого является матрица

$$[G] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что этот граф является колчаном матриц показателей

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & k & \cdots & k \\ k & 0 & \dots & k \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ k & k & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ k \ge 1.$$

Необходимость. Пусть граф G является колчаном некоторой матрицы показателей. Количество K_1 стрелок (не считая петли) графа G по условию равно $n^2 - n$. При $n \ge 3$ имеем $K_1 = n^2 - n > n^2 - 3n + 4$ и по теореме 3 такой колчан имеет петлю в каждой вершине.

Теорема 4 доказана.

Ограничения на число простых ориентированных циклов колчана матрицы показателей устанавливает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $Q(\varepsilon)$ *– колчан некоторой матрицы показателей* ε*,* K_s *– количество простых ориентированных циклов длины* s *колчана* $Q(\varepsilon)$*,* K *– количество всех ориентированных циклов, включая петли, колчана* $Q(\varepsilon)$*. Тогда*

$$0 \le K_s \le P_{s-1} \cdot C_n^s = \frac{n!}{s \cdot (n-s)!};$$

$$1 \le K \le n! \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s \cdot (n-s)!},$$

где n *— число вершин колчана* $Q(\varepsilon)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицы показателей порядка n:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Их колчаны $Q(\varepsilon_1)$ и $Q(\varepsilon_2)$ имеют матрицы смежности

$$[Q(\varepsilon_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$[Q(\varepsilon_2)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что колчаном матрицы ε_1 является простой ориентированный цикл длины n, а колчан $Q(\varepsilon_2)$ имеет простые ориентированные циклы только длины 2 и не имеет простых циклов другой длины.

Из этих примеров следует, что минимально возможное число простых ориентированных циклов длины s в колчане приведённой матрицы показателей равно нулю.

Максимально возможным числом стрелок колчана с n вершинами есть n^2. Рассмотрим матрицу показателей порядка n

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & k & k & \dots & k \\ k & 0 & k & \dots & k \\ k & k & 0 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ k & k & \dots & k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

Колчаном матрицы ε_3 является колчан с матрицей смежности

$$[Q(\varepsilon_3)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то есть для каждого n есть колчаны с n вершинами и n^2 стрелками.

Число способов, которыми можно выбрать из n вершин s разных вершин без учёта их порядка, равно числу сочетаний из n по s:

$$C_n^s = \frac{n!}{s!(n-s)!}.$$

Число разных простых ориентированных циклов из выбранных s вершин равно числу перестановок из $s-1$ элементов:

$$P_{s-1} = (s-1)!.$$

Следовательно, максимально возможное число простых ориентированных циклов длины s колчана $Q(\varepsilon)$ равно

$$P_{s-1} \cdot C_n^s = (s-1)! \cdot \frac{n!}{s! \cdot (n-s)!} = \frac{n!}{s \cdot (n-s)!}$$

и

$$0 \leq K_s \leq P_{s-1} \cdot C_n^s = \frac{n!}{s \cdot (n-s)!}.$$

Поскольку колчан приведённой матрицы показателей всегда сильно связный, то он всегда имеет по крайней мере один ориентированный цикл. Максимально возможное число простых ориентированных циклов колчана $Q(\varepsilon)$ равно

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{n!}{s \cdot (n-s)!} = n! \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s \cdot (n-s)!}.$$

Следовательно,

$$1 \leq K \leq n! \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s \cdot (n-s)!}.$$

Теорема 5 доказана.

3. Выводы. Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы для исследований в теории представлений и современной структурной теории колец. В дальнейшем планируется продолжение исследования поставленной проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цюпий С.И. Матрицы показателей и их колчаны *Современные проблемы математики, механики и информатики. Сборник статей.* Под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича. Харьков: Вид-во ФОП Воровець А.П. Видавнича група «Апостроф», 2011. – С. 400–407.
2. Цюпій С.І. Про множину сагайдаків напівмаксимальних кілець. *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. – 2004. – N 6 (38). – С.143–148.