УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Тахиров Ж.О., Расулов М.С.

Институт математики при НУУз., Ташкент, Узбекистан

В статье рассматривается двухфазная гиперболическая задача со свободной границей, которая встречается в газодинамике. Исследована поведения и гладкость свободной границы. Доказаны теоремы единственности и существования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: газодинамика, гиперболическая система, задача со свободной границей, теорема единственности и существования.

ПРО ОДНУ ГІПЕРБОЛІЧНИУ ЗАДАЧУ З ВІЛЬНОЮ ГРАНИЦЕЮ

Тахіров Ж.О., Расулов М.С.

В роботі розглядається двофазна гіперболічна задача з вільною границею, яка зустрічається в газодинаміці. Досліджено поведінку і гладкість вільної границі. Доведено теореми єдиності та існування.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: газодинаміка, гіперболічна система, задача з вільною границею, теорема єдиності та існування.

ON HYPERBOLIC FREE BOUNDARY PROBLEM

Takhirov Zh.O. Rasulov M.S.

The two-phase hyperbolic free boundary problem that occurs in gas dynamics is discussed. The behavior and the smoothness of the free boundary is studied. Theorems of uniqueness and existence are proved.

KEY WORDS: gas dynamics, hyperbolic system, free boundary problem, existence and uniqueness theorem.

1. Введение. Задачи, возникающие в приложениях и проводящие к задачам со свободной границей, служат моделью для выделения новых направлений. Например, на основе уравнений тепломассопереноса и задач со свободной границей разработаны математические модели ряда технологических процессов (см. [1,2]). Понятна актуальность задачи поиска и исследования новых физически осмысленных математических моделей для описания переноса тепла. Одна из таких моделей – эта гиперболическая модель теплопроводности, которая описывает процесс распространения тепла в среде, обладающей релаксационными свойствами.

Пусть q – поток тепла, T –температура, τ – время релаксации, k –удельная теплопроводность, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость. Гиперболическая модель переноса тепла получается путем замены классического закона теплопроводности Фурье

$$q=-kT_x,$$

релаксационным соотношением первого порядка

$$\tau q_t+q=-kT_x.$$

Комбинируя это соотношение с законом сохранения энергии

$$c\rho T_t=-q_x,$$

получим гиперболическую модель теплопроводности.

Надо отметить, что взаимосвязь газодинамических и тепловых процессов зачастую играет важную роль. В связь с этим в настоящее время активно исследуются задачи газодинамики, описываемые системой гиперболических уравнений. Так, появился цикл работ, посвященных исследованию задач со свободной границей для уравнений первого порядка (например, [3,5]). В настоящей работе рассматривается задача со свободной границей в связи с поставленной в [4] задачей о движении поршня под действием газа.

Пусть в бесконечной трубе содержится газ, который равномерно распределен по сечению трубы. Поршень заданной массы движется по трубе без сопротивления. Начальное положение и начальная скорость поршня, а также начальное состояние газа по обе стороны от поршня считаются заданными.

1. **Постановка задачи.** Требуется найти функции $\sigma_i(x,t)$, $\eta_i(x,t)$ $i=1,2$, $s(t)$ такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция

$s(t)$ определена при $t \ge 0$, $s(0)=0$, $\dot{s}(0)=s_0$, а функции $\sigma_i(x,t)$, $\eta_i(x,t)$ в области D_i, $i=1,2$, где $D_1=\{(x,t): -\infty<x<s(t),\ t\ge 0\}$, $D_2=\{(x,t): s(t)<x<\infty, t\ge 0\}$, удовлетворяет следующим системам уравнений и условиям

$$(x,t)\in D_1,$$

$$\begin{cases}\sigma_{1t}(x,t)+a_1\eta_{1x}(x,t)=0 & (1)\\ \eta_{1t}(x,t)+b_1\sigma_{1x}(x,t)=0 & (2)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1(x,0)=f_1(x), \eta_1(x,0)=g_1(x), -\infty<x\le 0,\\ &k_1\eta_1(s(t),t)=\dot{s}(t),\ t\ge 0,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$(x,t)\in D_2,$$

$$\begin{cases}\sigma_{2t}(x,t)+a_2\eta_{2x}(x,t)=0 & (4)\\ \eta_{2t}(x,t)+b_2\sigma_{2x}(x,t)=0 & (5)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_2(x,0)=f_2(x), \eta_2(x,0)=g_2(x), 0\le x<\infty,\\ &k_2\eta_2(s(t),t)=\dot{s}(t), t\ge 0,\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$m\ddot{s}(t)=\sigma_1(s(t),t)-\sigma_2(s(t),t), t\ge 0. \quad (7)$$

В работе [4] поставленная задача была исследована при $a_1=b_1=a_2=b_2=k_1=k_2$.

Будем считать, что выполнены следующие условия:

1. Функции $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i=1,2$ непрерывно дифференцируемы;
2. Выполнено условие согласования
3. $k_1 g_1(0)=k_2 g_2(0)$,
4. Коэффициенты a_i, b_i, k_i, m_i, $i=1,2$ постоянные, причем $a_i b_i>0$.

Характеристики систем (1), (2), (4), (5) определяются как интегральные линии дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{a_i b_i},\ i=1,2.$$

Введем новые функции

$$u_i(x,t)=\sigma_i(x,t)+\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\eta_i(x,t),$$

$$\upsilon_i(x,t)=\sigma_i(x,t)-\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\eta_i(x,t),$$

$$\phi_i(x)=f_i(x)+\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}g_i(x),$$

$$\psi_i(x)=f_i(x)-\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}g_i(x),\ i=1,2.$$

Тогда задача (1)–(7) примет вид

$$(x,t)\in D_1,$$

$$\begin{cases}u_{1t}(x,t)+\sqrt{a_1b_1}u_{1x}(x,t)=0 & (8)\\ \upsilon_{1t}(x,t)-\sqrt{a_1b_1}\upsilon_{1x}(x,t)=0 & (9)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_1(x,0)=\phi_1(x),\ \upsilon_1(x,0)=\psi_1(x),\ -\infty<x\le 0\\ &\frac{k_1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\left[u_1(s(t),t)-\upsilon_1(s(t),t)\right]=\dot{s}(t),\ t\ge 0.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$(x,t)\in D_1,$$

$$\begin{cases}u_{2t}(x,t)+\sqrt{a_2b_2}u_{2x}(x,t)=0 & (11)\\ \upsilon_{2t}(x,t)-\sqrt{a_2b_2}\upsilon_{2x}(x,t)=0 & (12)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_2(x,0)=\phi_2(x),\ \upsilon_2(x,0)=\psi_2(x),\ 0\le x<\infty\\ &\frac{k_2}{2}\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\left[u_2(s(t),t)-\upsilon_2(s(t),t)\right]=\dot{s}(t), t\ge 0\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$m\ddot{s}(t)+c\,\dot{s}(t)=u_1(s(t),t)-\upsilon_2(s(t),t), \quad (14)$$

где $c=\left(\frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}+\frac{1}{k_2}\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\right)$.

Обозначим

$\Omega=\{(x,t): -\alpha t<x<\alpha t, t\ge 0\}$, здесь $\alpha=\min\left\{\sqrt{a_1b_1}, \sqrt{a_2b_2}\right\}$

Сначала установим двустороннюю оценку для неизвестной границы $s(t)$, которая необходима для корректности и глобальной разрешимости поставленной задачи.

Пусть

$$\delta\equiv\sup_{-\infty<x\le 0\le y<\infty}\left\{\left|\phi_1(x)-\psi_2(y)\right|\right\}.$$

3. Оценки для неизвестной границы.

Теорема 1. *Пусть* $u_i(x,t)$, $\upsilon_i(x,t)$, $s(t)$ *являются решением задачи* (8)–(14) *и выполнены неравенства*

$$0\le\delta<c,\quad |s_0|<\alpha\left(1-\frac{\delta}{c}\right).$$

Тогда $|s(t)|\le(\alpha-\Delta)$, $t\ge 0$.

Доказательство. Используем обыкновенное дифференциальное уравнение (14) для *s(t)*

$$m\ddot{s}(t)+c\,\dot{s}(t)=F(s(t),t), \quad (15)$$

где $F(x,t)=u_1(x,t)-\upsilon_2(x,t)$ определена в области Ω. Интегрируя уравнения (8) и (12) вдоль соответствующих характеристик, находим $F(x,t)$ в Ω в виде

$$F(x,t)=\phi_1\left(x-\sqrt{a_1b_1}\right)-\psi_2\left(x+\sqrt{a_2b_2}\right).$$

очевидно, что $\sup_{\Omega}|F(x,t)|=\delta$.

Умножая (15) на $e^{\left(\frac{c}{m}\right)t}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[m\,e^{\left(\frac{c}{m}\right)t}\dot{s}(t)\right]=F(s(t),t)e^{\left(\frac{c}{m}\right)t} \quad (16)$$

Интегрируя (16) по t в пределах от 0 до t, находим

$$\dot{s}(t)me^{\left(\frac{c}{m}\right)t}-s_0m=\int_0^t F(s(\xi),\xi)e^{\left(\frac{c}{m}\right)\xi}d\xi \qquad (17)$$

Отсюда

$$|\dot{s}(t)|\le|s_0|e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}+\frac{\delta}{m}\left[1-e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right]\le|s_0|+\frac{\delta}{m}$$

Пусть $\Delta=\alpha\left(1-\frac{\delta}{m}\right)-|s_0|$. Тогда $\Delta>0$ и

$$\sup_{t\ge0}|\dot{s}(t)|\le\alpha-\Delta \qquad (18)$$

и

$$|s(t)|\le(\alpha-\Delta)t,\ t\ge0 \qquad (19)$$

Существование единственного решения $s=s(t)$ уравнения (15) для $t\ge0$ следует из дифференцируемости $F(x,t)$ и априорной оценки (19). Так как $F(x,t)$ непрерывна и ограничена, то $\ddot{s}(t)$ также непрерывна и ограничена.

Введем функции $\tau_i=\tau_i(x,t)$, $i=1,2$, определенные в Ω следующим образом: если $-\alpha t<x<s(t)$, то $\tau_2(x,t)$ есть единственное неотрицательное решение уравнения

$$x+\alpha t=s(\tau_2)+\alpha\tau_2. \qquad (20)$$

Если $s(t)<x<\alpha t$, то $\tau_1(x,t)$ – единственное неотрицательное решение уравнения

$$x-\alpha t=s(\tau_1)-\alpha\tau_1. \qquad (21)$$

Докажем разрешимость уравнений (19) и (20). Для (19) рассмотрим функцию

$$f_1(\tau)=s(\tau)+\alpha\tau-x-\alpha t.$$

Проверим свойства непрерывных функций в промежутке $[0,t]$:

$$f_1(0)=-x-\alpha t<0,$$
$$f_1(t)=s(t)-x>0,$$
$$f_1'(\tau)=\dot{s}(\tau)+\alpha>0.$$

Точно также доказывается существование единственного решения $\tau_1(x,t)$ уравнения (20), причем $0\le\tau_1(x,t)\le t$. Дифференцируемость функций $\tau_i(x,t)$ устанавливается с помощью (20) и (21).

Существование решения.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1–2 и условия теоремы 1. Тогда решение задачи (8)–(14) существует.*

Доказательство. Сначала построим решение задачи (8)–(14), а затем задачи (1)–(7).

Используя метод характеристик для гиперболических уравнений первого порядка, находим

$$u_1(x,t)=\phi_1\left(x-\sqrt{a_1b_1}t\right),\ -\infty<x<\sqrt{a_1b_1}t, \qquad (22)$$

$$\upsilon_1(x,t)=\psi_1\left(x+\sqrt{a_1b_1}t\right),\ -\infty<x<-\sqrt{a_1b_1}t, \qquad (23)$$

$$\upsilon_1(x,t)=\upsilon_1(s(\tau),\tau)=u_1(s(\tau),\tau)-\frac{2}{k_1}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\dot{s}(t),$$
$$-\sqrt{a_1b_1}t<x<s(t) \qquad (24)$$

$$u_2(x,t)=\phi_2\left(x-\sqrt{a_2b_2}t\right),\ \sqrt{a_2b_2}t<x<\infty, \qquad (25)$$

$$u_2(x,t)=u_2(s(\tau),\tau)=\upsilon_2(s(\tau),\tau)+\frac{2}{k_2}\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\dot{s}(t),$$
$$s(t)<x<\sqrt{a_2b_2}t, \qquad (26)$$

$$\upsilon_2(x,t)=\psi_2\left(x+\sqrt{a_2b_2}t\right),\ -\sqrt{a_2b_2}t<x<\infty. \qquad (27)$$

где $u_1(s(\tau),\tau)$ в (24) дается в виде (22), а $\upsilon_2(s(\tau),\tau)$ в формуле (26) – в виде (27).

Из (18) находим нелинейное интегральное уравнение относительно $s(t)$

$$s(t)=\int_0^t s_0e^{-\left(\frac{c}{m}\right)y}dy+\frac{1}{m}\int_0^t dy\int_0^y F(s(\xi),\xi)e^{-(y-\xi)\xi\frac{c}{m}}d\xi \qquad (28)$$

Функции $s(t)$, $\dot{s}(t)$ и $\ddot{s}(t)$ будут найдены поэтапно из (28), (17) и (15). Подставляя эти найденные функции в (24), (26), полностью восстановим решения системы (8)–(14).

4. Единственность решения.

Теорема 3. *При условиях теоремы 2 решение задачи (8)–(14) единственно.*

Доказательство. Рассматривается однородная задача. В силу однородности начальных условий и учитывая, что полученные выражения не зависят $s(t)$ из (22), (23), (25), (27) имеем

$$u_1(x,t)\equiv0,\qquad -\infty<x<\sqrt{a_1b_1}t,$$
$$\upsilon_1(x,t)\equiv0,\qquad -\infty<x<-\sqrt{a_1b_1}t,$$
$$u_2(x,t)\equiv0,\qquad \sqrt{a_2b_2}t<x<\infty,$$
$$\upsilon_2(x,t)\equiv0,\qquad -\sqrt{a_2b_2}t<x<\infty.$$

Предполагается существование двух решений, в частности. $s_1(t)$, $s_2(t)$. Теперь, докажем что $s_1(t)\equiv s_2(t)$.

Так как в начальный момент времени $s_1(0)=s_2(0)=0$ и $\dot{s}_1(0)=\dot{s}_2(0)=s_0$, то при малых $0\le t\le t_0$ $s_1(t)\equiv s_2(t)$ и пусть $\ddot{s}_1(t_0)>\ddot{s}_2(t_0)$, $\dot{s}_1(t_0)\ge\dot{s}_2(t_0)$. Следовательно, $\dot{s}_1(t_1)>\dot{s}_2(t_1)$, $t_0<t_1$. Далее $s_1(t_2)>s_2(t_2)$, $t_1<t_2$ т.е начиная с точки t_1 $s_1(t)$ идет направо от $s_2(t)$.

Имеем

$$m\ddot{s}_1(t_0)+c\dot{s}_1(t_0)=F(s_1(t_0),t_0),$$

$$m\ddot{s}_2(t_0)+c\dot{s}_2(t_0)=F(s_2(t_0),t_0).$$

Вычитая из первого уравнения второе и учитывая, что $s_1(t_0)\equiv s_2(t_0)$, $\dot{s}_1(t_0)\ge \dot{s}_2(t_0)$, получим

$$m(\ddot{s}_1(t_0)-\ddot{s}_2(t_0))+c(\dot{s}_1(t_0)-\dot{s}_2(t_0))=0$$

или

$$m(\ddot{s}_1(t_0)-\ddot{s}_2(t_0))=-c(\dot{s}_1(t_0)-\dot{s}_2(t_0))\le 0.$$

Получено противоречие. Т. о. для $\forall t\in[0,T]$ имеем $s_1(t)\equiv s_2(t)$. Теперь из (24) и (26) можем утверждать, что

$$\upsilon_1(x,t)\equiv 0, \qquad -\sqrt{a_1b_1}\,t<x<s(t),$$

$$u_2(x,t)\equiv 0, \qquad s(t)<x<\sqrt{a_2b_2}\,t.$$

Теорема доказана.

5. Поведение решения при $t\to\infty$.

Пусть

$$R(t_0)=\left\{\sup_{-\infty<x<-\sqrt{a_1b_1}t_0}|\phi_1|+\sup_{\sqrt{a_2b_2}t_0<x<\infty}|\psi_2|\right\},\quad t_0\ge 0.$$

Теорема 3. *Предположим, что*

$$\int_0^\infty R(t)dt<\infty. \tag{29}$$

Тогда $\lim_{t\to\infty} s(t)$ *существует и конечен.*

Доказательство. Достаточно установить, что

$$\int_0^\infty \dot{s}(t)dt \tag{30}$$

существует и конечен. Из (17) находим

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dy}\left[me^{\left(\frac{c}{m}\right)y}\dot{s}(y)\right]dy=\int_{t_0}^{t}F(s(y),y)e^{\left(\frac{c}{m}\right)y}dy.$$

Отсюда

$$|\dot{s}(t_0)|\le\frac{s_0}{m}e^{-(t-t_0)\frac{c}{m}}+k_3R(t_0)$$

При $t=2t_0$, имеем

$$|\dot{s}(2t_0)|\le\frac{s_0}{m}e^{-t_0\frac{c}{m}}+k_3R(2t_0). \tag{31}$$

Сходимость (30) следует из (29) и (31).

Теорема 3. доказана.

Теперь исследуем поведение решения уравнения. Рассмотрим произвольный промежуток $[x_1,x_2]$ и пусть

$$\omega(t)=\max\left\{\begin{array}{ll}\sup\limits_{x_1\le x\le s(t)}|u_1(x,t)|, & \sup\limits_{x_1\le x\le s(t)}|u_2(x,t)|,\\ \sup\limits_{s(t)\le x\le x_2}|\upsilon_1(x,t)|, & \sup\limits_{s(t)\le x\le x_2}|\upsilon_2(x,t)|\end{array}\right\}$$

Теорема 4. *Если* f_1, $g_1\to 0$ *при* $x\to-\infty$, f_2, $g_2\to 0$ *при* $x\to\infty$, *то* $\omega(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Доказательство. Рассмотрим случай $u_1(x,t)$, $\upsilon_1(x,t)$, $x_1\le x\le s(t)$. Понятно, что $x-\sqrt{a_1b_1}t\le s(t)-\sqrt{a_1b_1}t\le s(t)-\alpha t\le-\Delta t$. В силу (22) находим

$$\sup_{x_1\le x\le s(t)}|u_1(x,t)|\le\sup_{x_1\le x\le s(t)}\left|\phi_1\left(x-\sqrt{a_1b_1}t\right)\right|\le R(t), \tag{32}$$

а из (24), с учетом (18) имеем

$$\begin{aligned}\sup_{x_1\le x\le s(t)}|\upsilon_1(x,t)|&\le\sup_x|u_1(s(\tau_2),\tau_2)|+\frac{2}{k_1}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\times\\ &\times\sup_x|s(\tau_2)|\le\sup_x|R(\tau_2)|+\frac{2}{k_1}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\left[R(\tau_2)+|s_0|e^{-\left(\frac{c}{m}\right)\tau_2}\right]\end{aligned} \tag{33}$$

Нужна нижняя оценка для $\tau_2(x,t)$.

Имеем

$$x+\alpha t=s(\tau)+\alpha\tau.$$

Так как

$$x+\alpha t\le(\alpha-\Delta)\tau+\alpha\tau,$$

то

$$x+\alpha t\le(2\alpha-\Delta)\tau.$$

Следовательно,

$$\tau_2(x,t)\ge\tau^*=\frac{x_1+\alpha t}{2\alpha-\Delta}>0.$$

Видно, что при $t\to\infty$ $\tau_2(x,t)\to\infty$.

Утверждение теоремы следует из (32) и (33).

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткаченко В.Н. *Математический моделирование и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов.* – Киев, Наукова Думка. – 2008. – 250 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача.* – М.: УРСС. – 2003. – 800 с.
3. Dening Li. The well-posedness of a hyperbolic Stefan problem. *Quart. Appl. Math.* – 1989. – v.47, N 2. – P.221–231.
4. Denson Hill C. A hyperbolic free boundary problems. J.*Math. Anal. and Appl.* – 1970. – v.31. – P.117–129.
5. Friedman A., Hu Bei. The Stefan problem for hyperbolic heat equation. *J.Math. Anal. and Appl.* – 1989. – v.138, N l. – P.249–279.