УДК 517. 53/. 57

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рябых В.Г., Рябых Г.Ю.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

В статье выводится система интегральных уравнений, из компонентов решения которой можно составить экстремальную функцию для линейного функционала над пространством Бергмана. Полученный результат применяется для нахождения общего вида экстремальных функций. Выведенные формулы могут найти применение в некоторых вопросах механики.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: линейные функционалы, пространство Бергмана, экстремальная функция.

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ В ПРОСТОРАХ БЕРГМАНА ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рябих В.Г., Рябих Г.Ю.

В роботі виводиться система інтегральних рівнянь, з компонентів розв’язку якої можна скласти екстремальну функцію для лінійного функціоналу над простором Бергмана. Отриманий результат застосовується для знаходження загального вигляду екстремальних функцій. Виведені формули можуть знайти застосування в деяких питаннях механіки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінійні функціонали, простір Бергмана, екстремальна функція.

EXTREMAL PROBLEMS OF THE BERGMAN SPACE AND INTEGRAL EQUATIONS

Ryabykh V.G., Ryabykh G.Y.

A system of integral equations which solution components can help to compose the extremal function for a linear functional on the Bergman space is derived. The obtained result is used for finding the general form of the extremal functions. The derived formulas can be applied to some problems of mechanics.

KEY WORDS: linear functionals, Bergman space, extremal function.

1. Введение. Одной из интересных областей теории банаховых пространств аналитических функций является проблема нахождения норм и экстремальных функций линейных функционалов. Однако, решение этой задачи осложнено тем, что функциональное уравнение, решением которого является экстремальная функция, нелинейно. Поэтому очевидны попытки линеаризовать эту задачу.

В [1] было получено линейное интегральное уравнение, решением которого являются экстремальные функции линейного функционала в пространстве Харди H_1. После этого в [2] были найдены экстремальные функции широкого класса линейных функционалов.

В данной статье будет найдено линейное интегральное уравнение, решением которого является экстремальная функция линейного функционала над пространством Бергмана.

2. Основные определения, обозначения и теоремы, используемые для доказательства

$D=\{z\in \mathbb{C}:|z|<1\}$, $d\sigma$ –плоская мера Лебега; экстремальная функция (э.ф.) f функционала l: $\|f\|=1$, $l(f)=\|l\|$, линейный функционал (л.ф.) $l_\omega(x)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D x\bar{\omega}\,d\sigma$; пространство H'_p (Бергмана): подпространство $L_p(D)$, состоящее из функций, аналитических в D, аннулятор H_1' – $H_1'^{\perp}=\{x\in L_\infty : l_{\bar{x}}(a)=0, a\in H'_1\}$; пространство Харди H_p, $0<p<\infty$, – множество функций, аналитических в D, с конечной величиной $\sup\limits_{0\le r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}^{1/p}$.

Теорема I. **[3]** *Если* $\phi \in H'_p$, $0 < p < \infty$, $\phi(a_k) = 0$, *то ее можно представить в виде*

$$\phi(z) = \Phi(z)\Psi(z), \Phi(z) = (H(z))^{1/2} \neq 0, z \in D,$$

$$\Psi(z) = (H(z))^{1/2} B(z), z \in D, \Phi, \Psi \in H'_{2p}$$

Причем, $\|\phi\|_{H'_p}^{1/2} = \|\Phi\|_{H'_{2p}}$.

Теорема II. *Если линейный функционал* $l_\omega \in H'^*_1, \omega \in C(\overline{D})$, *то его э.ф. существует.*

Теорема III. **[4]** *Если э.ф. у л.ф. над* H'_1 *существует, то она единственна.*

Теорема IV. *Если* $l_\omega \in H'^*_1, \omega \in C^1(\overline{D})$, *то э.ф.* $f \in H_1$.

Теорема V. *Пусть* $\omega \in L_\infty(D)$, *а* $x \in H'^{\perp}_1$, $l_\omega \in H'^*_1$. *Тогда*

1. $\|l_\omega\| = \inf\limits_{x \in H'^{\perp}_1} \|\overline{\omega} - x\|_{L_\infty}$.

2. Существует функция χ *из аннулятора, на которой достигается равенство из 1.*

3. Для того, чтобы функция f *была э.ф для* $l_{\overline{\omega}} \in H'^*_1$, *необходимо и достаточно, чтобы п.в. на* D *выполнялось соотношение*

$$\|l_\omega\| \frac{|f(z)|}{f(z)} = \overline{\omega}(z) - \chi(z), \quad \chi \in H'^{\perp}_1 \tag{1}$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $\Phi, \Psi \in H'_2$ *– решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} \overline{\Phi(t)} = \lambda \Psi(t)\overline{\omega}(t) + \Psi(t)\chi(t), \\ \overline{\Psi(t)} = \lambda \Phi(t)\overline{\omega}(t) + \Phi(t)\chi(t) \end{cases}, \tag{2}$$

$\omega \in L_\infty$, $\chi \in H'^{\perp}_1$ *при минимальном положительном* λ *и* $\|\Phi\|_2 = \|\Phi\Psi\|_1 = 1$.

Тогда

1. *Если* f *– э.ф. для функционала* l_ω, *то ее можно представить в виде* $f = \Phi\Psi$, *где* (Φ, Ψ) *– решение системы (2), удовлетворяющее условию* $\|\Phi\|_2 = \|\Phi\Psi\|_1 = 1$ *и* $\lambda = 1/\|l_\omega\|$. .
2. *Если* (Φ, Ψ) *– решение системы (2) при минимальном положительном* λ, *и* $1 = \|\Phi\|_2 = \|\Phi\Psi\|_1$, *то* $f = \Phi\Psi$ *– экстремальная функция функционала* l_ω *и* $\|l_\omega\| = \frac{1}{\lambda}$.

Доказательство.

1. Пусть f – экстремальная функция, и $f(a_k) = 0, k = 1, \ldots$ $b_{n,r}(z) = z^\mu \prod\limits_{k=1}^{n(r)} \frac{r|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{r^2 - \overline{a}_k z}$, $|a_{n(r)}| < r$, $f(0) = f'(0) \ldots f^{(\mu-1)}(0) = f^{(\mu)}(0) \neq 0$.

Рассмотрим функции $\left(\frac{f(z)}{b_{n,r}(z)}\right)^{1/2}$ и $\left(\frac{f(z)}{b_{n,r}(z)}\right)^{1/2} \cdot b_{n,r}(z)$. Заметим, что при $z = re^{i\theta}$ эти функции п.в. в D совпадают, соответственно, с функциями $\Phi(re^{i\theta}), \Psi(re^{i\theta})$ из теоремы I, принадлежащими H'_2 , причем, $\|\Phi\|_{H'_2} = \|\Phi\Psi\|_{H_1} = 1$.

Почти всюду в D по теореме V выполняется ($t = re^{i\theta}$):

$$\frac{|f(t)|}{f(t)} = \frac{\overline{\left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right)^{1/2} \left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right)^{1/2}}}{\left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right) b_{n,r}(t)} = \frac{\overline{\left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right)^{1/2}}}{\left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right)^{1/2} b_{n,r}(t)} =$$

$$= \frac{\overline{\left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right)^{1/2}}\,\overline{b_{n,r}(t)}}{\left(\frac{f(t)}{b_{n,r}(t)}\right)^{1/2}} = \frac{\overline{\Psi(t)}}{\Phi(t)} = \frac{\overline{\Phi(t)}}{\Psi(t)} = 1/\|l_\omega\|(\overline{\omega}(t) - \chi(t)),$$

т.е. почти всюду на D имеем:

$$\begin{cases} \overline{\Phi(t)} = \lambda(\Psi(t)\overline{\omega}(t) - \Psi(t)\chi(t)), \\ \overline{\Psi(t)} = \lambda(\Phi(t)\overline{\omega}(t) - \Phi(t)\chi(t)) \end{cases}.$$

Получаем (2) и условие $\|\Phi\|_{H'_2} = \|\Phi\Psi\|_{H'_1} = 1$.

2. Пусть выполнено (2). Умножим обе части первого уравнения (2) на Φ и проинтегрируем по D. Тогда, в силу равенства нулю второго слагаемого правой части, получим

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_D |\Phi|^2 \, d\sigma = \frac{\lambda}{\pi}\iint\limits_D \Phi\Psi\overline{\omega} d\sigma,$$

но $1 = \|\Phi\|_{H'_2} = \|\Phi\Psi\|_{H'_1}$.

Это означает, что для $f = \Phi\Psi$ выполняется $l_\omega(f) = \frac{1}{\lambda}$, а из минимальности λ следует, что f является экстремальной функцией для l_ω.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если у функционала* $l_\omega \in H'^*_1$ *существует э.ф.* f, *то ее можно представить в виде* $f(z) = \Phi(z)\Psi(z), z \in D$, *где* $\Phi \in H'_2$ *– решение интегрального уравнения*

$$\|l_\omega\|^2 \Phi(t) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D \Phi(\zeta) d\sigma(\zeta) \iint\limits_D \frac{\overline{\omega}(\zeta)\omega(z) d\sigma(z)}{(1-\overline{z}t)^2(1-\overline{z}\zeta)^2},$$

а

$$\|1_\omega\|\Psi(t) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\overline{\Phi}(t)\omega(t)d\sigma(t)}{(1-\bar{t}z)^2}$$ – *проекция* $\overline{\Phi\omega}$ *из* $L_2(D)$ *на* H'_2.

Доказательство.

Умножим обе части равенства, сопряженного к первому равенству из (2), на $\frac{1}{\pi}\frac{d\sigma(t)}{(1-\bar{t}z)^2}$. После интегрирования по t получаем:

$$\|1_\omega\|\Phi(t) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\overline{\Psi}(z)\omega(z)d\sigma(z)}{(1-\bar{z}t)^2}.$$

Подобно предыдущему найдем из второго равенства (2)

$$\overline{\Psi(z)} = \frac{1}{\pi\|1_\omega\|}\iint_D \frac{\Phi(\zeta)\overline{\omega}(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}$$

Подставляя значение $\overline{\Psi}$, получим

$$\|1_\omega\|^2\,\Phi(t) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\Phi(\zeta)\overline{\omega}(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\omega(z)d\sigma(z)}{(1-\bar{z}t)^2}$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\|1_\omega\|^2\,\Phi(t) = \frac{1}{\pi^2}\iint_D \Phi(\zeta)d\sigma(\zeta)\iint_D \frac{\overline{\omega}(\zeta)\omega(z)d\sigma(z)}{(1-\bar{z}t)^2(1-\bar{z}\zeta)^2}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* f – *э.ф. функционала* $1_\omega \in H'^*_1$, *то*

$$f(z) = \frac{1}{(\pi\|1_\omega\|)^2}\iint_D \frac{\overline{\Psi}(t)\omega(t)d\sigma(t)}{(1-\bar{t}z)^2}\iint_D \frac{\overline{\Phi}(t)\omega(t)d\sigma(t)}{(1-\bar{z}t)^2(1-\bar{t}z)^2}$$

Доказательство следует из теоремы 2 и равенства $f = \Phi\Psi$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 12-01-00065.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябых В.Г. Необходимое и достаточное условие существования линейного функционала над H_1. *СМЖ*. – 2007. – т. 48, N6. – С. 1351 – 1360.
2. Рябых В.Г., Рябых Г.Ю. Представление экстремальных функций в явном виде для широкого класса линейных функционалов над пространством H_1. *Вестник Донского гос. тех. ун-та.* – 2009. – т. 9, N 1(40). – С.3 – 12
3. Riabykh V.G., Riabykh G.Y. Of the distribution of zeros functions of Bergman space. *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*. Kharkov. Apostrof. – 2011. – P. 336 – 341
4. Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. *Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним.* Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ. – 2011. – 183 с.