УДК 519.177

О МОДЕЛЯХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ЭЙЛЕРОВЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Романов В. Ф.

Владимирский государственный университет, Институт инновационных технологий, Россия

Приведен анализ свойств и характеристик эйлеровых орграфов, входящих в круг задач моделирования дискретных систем. Установлена совместимость в общем контуре последовательностей вершин, составляющих контуры максимальных систем декомпозиции рассматриваемых орграфов; результаты такого совмещения интерпретируют последовательности объектов или событий в прикладных задачах. Доказана полиномиальная сводимость задачи о вершинном покрытии неориентированного графа к задаче о разрезании контуров для одной из модификаций эйлерова орграфа.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: эйлеровы орграфы, оптимизационные задачи, математическое моделирование.

ПРО МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА ЕЙЛЕРОВИХ ОРІЄНТОВАНИХ ГРАФАХ

Романов В. Ф.

Наведено аналіз властивостей і характеристик ейлерових орграфів, які входять в коло задач моделювання дискретних систем. Встановлена сумісність в загальному контурі послідовностей вершин, які складають контури максимальних систем декомпозиції розглянутих орграфів; результати такого суміщення інтерпретують послідовності об'єктів або подій в прикладних задачах. Доведено поліноміальна сводімость задачі про вершинне покриття неорієнтованого графа до задачі про розрізуванні контурів для однієї з модифікацій ейлерова орграфа.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ейлерови орграфи, оптимізаційні задачі, математичне моделювання.

ON MODELS OF OPTIMIZATION PROBLEMS ON EULERIAN DIRECTED GRAPHS

Romanov V.F.

The analysis of the properties and characteristics of Eulerian direced graphs modeling the discrete systems is presented. Compatibility of a sequence of vertices composing the contours of the maximum decomposition systems of the considered digraphs within the general contour is established; the results of such a combination interpret the sequence of objects or events in the application problems. Polynomial reducibility of the problem on vertex cover of an undirected graph to the problem of cutting of the contours for a modification of the Euler digraph is proved.

KEY WORDS: Eulerian digraphs, optimization problems, mathematical modeling.

1. Введение. В число задач, адекватно представляемых графовыми моделями, входят задачи упорядочения событий, составления расписаний, оптимизации информационных потоков [1,2]. Среди разновидностей графов, используемых для указанных целей, определенное место занимают эйлеровы ориентированные графы (ЭОГ) – орграфы, содержащие циклический эйлеров путь. Целесообразность их изучения основана, в частности, на интерпретации ЭОГ как модели дискретной системы, которая после прохождения последовательности состояний возвращается в исходное состояние (состояниям ставятся в соответствие вершины, а переходам – дуги орграфа). ЭОГ может рассматриваться также как средство отображения множества последовательностей (событий, объектов и т. п.), которые должны быть совмещены по общим элементам.

2. Основные определения и свойства ЭОГ. При любой интерпретации ЭОГ общего вида $G = (V, E)$, где $|V| = n$, $|E| = m$, $n \le m$, может быть задан упорядоченной последовательностью

$$T = \langle v_{r_1}, v_{r_2}, ..., v_{r_m}, v_{r_1} \rangle, \qquad (1)$$

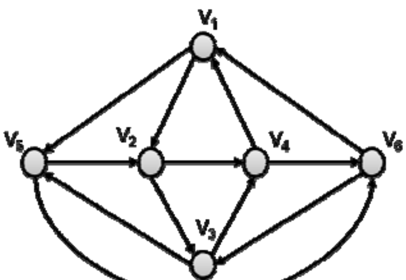
образованной перечислением вершин $v_{r_j} \in V$ $(j = 1, \dots, m)$ по порядку их следования вдоль какого-либо из циклических эйлеровых путей, содержащего (по определению, однократно) все дуги множества E.

Условие $n \le m$ означает, что вершины внутри последовательности (1) могут встречаться многократно; таким образом, в общем случае, в число рассматриваемых объектов включены графы, содержащие кратные дуги и петли.

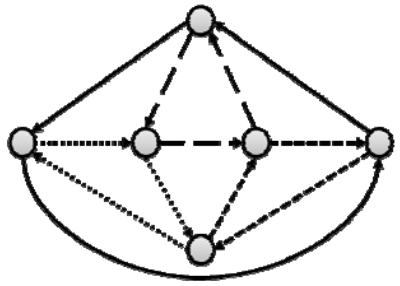
По построению ЭОГ всегда представляет собой систему контуров, которые, будучи рассмотрены попарно, не содержат общих дуг, но могут содержать общие вершины, другими словами, существует разбиение множества E дуг графа G на непересекающиеся подмножества, каждому из которых сопоставлен некоторый контур. Назовем упомянутую систему *системой декомпозиции ЭОГ*. В общем случае можно обнаружить множество систем декомпозиции ЭОГ, среди них одна или несколько систем содержат максимальное число контуров. Каждую из таких систем декомпозиции назовем *максимальной системой декомпозиции* (МСД), их общее число обозначим M(G).

Контурным рангом R(G) эйлерова орграфа G назовем число контуров, содержащихся в любой МСД. Очевидно, что M(G) и R(G) являются характеристиками ЭОГ.

Например, граф G, представленный на рис.1, может быть задан последовательностью $T = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_6, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6, v_1 \rangle$.



а



б

Рис.1. Эйлеров орграф G (а) и его система декомпозиции (б).

Этот граф имеет единственную МСД, состоящую из четырех контуров (дуги каждого контура изображены на рис. 1(б) однотипными линиями), следовательно R(G) = 4. Легко обнаруживаются также две системы декомпозиции, состоящие из трех контуров, с числом дуг, соответственно: 5, 4, 3; общим контуром в этих двух системах является контур $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 \rangle$, включающий дуги (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1).

Заметим, что удаление из графа G четырех подходящих дуг, например, (v_5, v_2), (v_4, v_1), (v_6, v_1), (v_6, v_3), приводит к формированию суграфа G' без контуров (рис. 2).

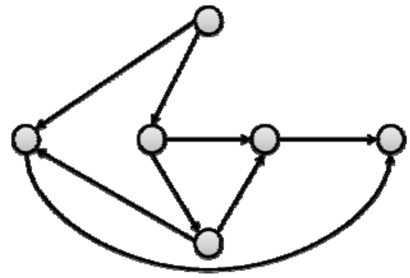


Рис.2. Суграф G' графа G, не содержащий контуров.

3. Постановка задачи об удалении дуг. Известно, что граф служит удобным средством представления бинарных отношений на множестве, в частности, отношений порядка. Частичное или полное упорядочение вершин орграфа достигается его преобразованием в суграф без контуров, причем в ряде задач принципиальным является условие удаления для этой цели минимального числа дуг; вопрос об априорной оценке этого числа для произвольных графов остается открытым.

Важное свойство ЭОГ – принадлежность любой из его дуг одному из контуров каждой системы декомпозиции. Поэтому, если суграф без контуров получен в результате удаления из графа G t дуг (в том числе всех петель – тривиальных контуров, входящих во все системы декомпозиции), то все t удаленных дуг принадлежат каждой системе декомпозиции исходного графа. В дальнейшем без ограничения общности анализа рассматриваются ЭОГ без петель.

Исходя из упомянутого свойства ЭОГ, естественно предположить, что минимальное число дуг, подлежащих удалению из графа G для получения суграфа без контуров, равно R(G). Необходимость такого утверждения очевидна, доказательство достаточности приведено в [1]. Очевидно, что задача выбора R(G) дуг, подлежащих удалению, для любого нетривиального ЭОГ имеет множество решений.

4. Совместимость контуров ЭОГ. Назовем контуры $C_1, \ldots, C_w$ ЭОГ *совместимыми*, если на множестве вершин

$$V^0 = \bigcup_{k=1}^{w} V_{C_k},$$

где V_{C_k} – множество вершин контура C_k, можно построить хотя бы один контур C^0, при обходе которого относительный порядок перечисления вершин каждого контура C_k $(k = 1, \ldots, w)$ будет сохранен. Очевидно, что циклические перестановки элементов контура сохраняют такой порядок.

Теорема 1. *Контуры каждой МСД в эйлеровом ориентированном графе* G *совместимы.*

Доказательство теоремы вытекает из свойств ЭОГ. Выделим из графа G суграф G' = (V, E'), не содержащий контуров, удалив подходящую систему из R(G) дуг. Множество E' дуг графа G'

покрывается орцепями, порожденными удалением ровно одной дуги из каждого контура всех МСД графа G и, следовательно, сохраняющими порядок перечисления вершин в упомянутых контурах (с точностью
до назначения начальных вершин). Таким образом, на множестве V вершин графа G' задано отношение □ строгого частичного порядка, которое интерпретируется следующим образом: v_i □ v_j , если имеется путь из вершины v_i в вершину v_j. Указанный порядок порожден порядком непосредственного следования друг за другом вершин во всех контурах максимальных систем декомпозиции графа G .

На основе имеющегося на множестве V частичного порядка установим линейный порядок $V'' = \langle v_{r_1}, v_{r_2}, ..., v_{r_n}\rangle$, применив известный алгоритм построения "правильной нумерации" вершин бесконтурного орграфа [3].

Контур C^0 строится соединением вершин, которые являются соседними в последовательности V", дугами $(v_{r_i}, v_{r_{i+1}})$, i = 1, …, n–1, и добавлением замыкающей дуги (v_{r_n}, v_{r_1}).

Теорема доказана.

Проиллюстрируем совместимость контуров МСД графа G, приведенного на рис. 1. В суграфе G' (рис. 2) можно выделить какую-либо совокупность S орцепей, выделенных из контуров МСД и покрывающих все множество дуг, например: $S = \{\langle v_1, v_2, v_4\rangle, \langle v_2, v_3, v_5\rangle, \langle v_1, v_5, v_6\rangle, \langle v_3, v_4, v_6\rangle\}$.

Здесь орцепи из соображений удобства заданы перечислением вершин. Ввиду отсутствия контуров в графе G', последовательности, указанные в S, совмещаются по одноименным вершинам, причем, не единственным способом (один из вариантов совмещения приведен в таблице 1).

Таблица 1. Совмещение орцепей.

N орцепи	***Вершины***					
1	v_1	v_2		v_4		
2		v_2	v_3		v_5	
3	v_1				v_5	v_6
4			v_3	v_4		v_6

Алгоритм совмещения включает, в общем случае, сдвиги вершин каждого контура в свободные клетки таблицы (вправо или влево) и циклические перемещения последовательностей, указанных в строках. По таблице определяются и удаляемые дуги – это дуги, замыкающие указанные последовательности: (v_4, v_1), (v_5, v_2), (v_6, v_1), (v_6, v_3).

Таким образом, результирующая последовательность вершин: $T_1 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\rangle$. Замыкая циклически последовательность T_1 добавлением в ее начало вершины v_1, получим описание контура C^0: $C^0 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$. С учетом сказанного, последовательность (1), задающая граф G, реализуется на контуре C^0 в виде замкнутого ормаршрута, связанного с R(E)-кратным обходом C^0.

Примером применения ЭОГ как модели дискретной системы с построением контура C^0 является оптимизация размещения инструментов для механообработки деталей в магазине многоцелевого станка [4].

В заключение отметим возможность применения описанного метода и к орграфам общего вида путем дополнения последних до ЭОГ, с последующим учетом эффекта, вызванного наличием добавленных (*фиктивных*) дуг.

5. Алгоритм перестановок. Рассмотрим один из алгоритмов точного решения задачи об отыскании в ЭОГ минимального числа дуг, подлежащих удалению с целью получения бесконтурного суграфа. Предлагаемый *алгоритм перестановок* решает данную задачу оптимизации без поиска систем декомпозиции и даже без явного нахождения контуров в орграфе [1].

Варианты оптимальной последовательности номеров вершин графа безусловно содержатся на множестве всех перестановок вершин. Средством идентификации оптимальной последовательности служит матрица смежности ЭОГ. Матрица смежности для графа G (рис. 1) с некоторым произвольным порядком перечисления вершин приведена в таблице 2.

Таблица 2. Матрица смежности ЭОГ.

Номера вершин	4	1	3	2	6	5
4		1			1	
1				1		1
3	1					1
2	1		1			
6		1	1			
5				1	1	

В обеих частях матрицы, разделенных главной диагональю, закодированы дуги, которые не образуют контуров между собой. Это справедливо для любой перестановки вершин, причем число дуг по обе стороны главной диагонали зависит от конкретной перестановки.

Искомой оптимальной последовательности вершин соответствует матрица, по одну сторону от главной диагонали которой закодированы удаляемые дуги, количество которых равно R(E), а по другую – дуги, образующие орцепи в суграфе без контуров В таблице 3 приведены матрицы смежности для двух перестановок, которые являются вариантами оптимального решения исследуемой задачи. Суграф без контуров G' (рис. 2) построен на основе первой из приведенных матриц.

Таким образом, действие алгоритма состоит в последовательном генерировании перестановок и анализе бинарных матриц. Оптимальной является любая из тех перестановок, которой соответствует матрица смежности с минимальным числом единиц по любую сторону от главной диагонали.

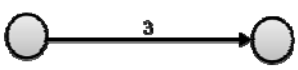
При известном значении R(E), т. е. числа дуг, подлежащих удалению, оптимальное решение может быть получено задолго до окончания перебора всех перестановок путем фиксации первой по порядку перестановки, отвечающей описанному выше критерию оптимальности. Кроме того, положительным фактором ускорения работы алгоритма является многовариантность оптимального решения.

Таблица 3. Матрицы смежности ЭОГ на основе двух перестановок.

	1	2	3	4	5	6			2	3	4	1	5	6
1		1			1			2		1	1			
2			1	1				3			1		1	
3				1	1			4				1		1
4	1					1		1	1				1	
5		1				1		5	1					1
6	1		1					6		1		1		

5. Взвешенный модифицированный ЭОГ. Введем в рассмотрение новый объект: *взвешенный модифицированный* ЭОГ (ВМЭОГ), в котором каждая k-кратная система дуг, соединяющих две вершины в ЭОГ, заменена одной дугой с числовым весом *k*, обозначающим *k*-кратное прохождение дуги при обходе циклического пути, по смыслу остающегося эйлеровым. В примере на рис. 3 k = 3; вновь введенные дуги изображаются утолщенными линиями с указанием их веса, остальные дуги *по умолчанию* имеют вес равный 1.

а



б

Рис.3. Кратная система дуг (а) и заменяющая дуга с весом 3 (б).

Следуя традиционной терминологии, назовем задачу о выделении из ЭОГ бесконтурного суграфа *задачей о множестве дуг, разрезающих контуры*. Рассмотрим вычислительную сложность этой задачи.

В [2] описано полиномиальное сведение известной NP-полной задачи ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ (ВП) для неориентированного графа к задаче о множестве дуг, разрезающих циклы в сопряженном орграфе.

Цель достигается преобразованием исходного неориентированного графа H = (V, Q) в орграф D = (V × {0, 1}, Q'), где Q' состоит из дуг вида:

1) (v^0, v^1) для каждой вершины $v \in V$;

2) (v^1, w^0) и (w^1, v^0) для каждого ребра $(v, w) \in Q$.

Таким образом, каждой вершине графа H ставятся в соответствие две вершины графа D, соединенные дугой, а каждому ребру графа H, с учетом пункта 1, сопоставляется контур из четырех дуг.

Несложный анализ, приведенный в [2], доказывает возможность замены поиска вершинного покрытия размера k в графе H поиском k-элементного множества пар вершин вершин вида $(v_i^{\ 0}, v_i^{\ 1})$ $(1 \le i \le k)$ в графе D из числа вершин, указанных выше в пункте 1.

Очевидно, что проверка корректности решения задачи в варианте распознавания, с ответом "да" для указанного множества, имеет полиномиальную сложность и, следовательно, задача находится в классе NP.

Теорема 2. *Задача о множестве дуг, разрезающих контуры ВМЭОГ, NP-полна*.

Доказательство. Рассмотренный выше граф D по построению является одним из структурных вариантов ВМЭОГ, поскольку для него справедливы следующие утверждения:

а) граф состоит из множества контуров, каждый из которых содержит две дуги типа $(v_j^{\ 0}, v_j^{\ 1})$, $(v_k^{\ 0}, v_k^{\ 1})$, сопоставленных смежным вершинам $v_j, v_k \in V$;

б) указанные дуги могут быть общими для нескольких контуров: кратность их вхождения в разные контуры определяется степенями породивших их вершин графа H .

в) если вершина $v \in V$ имеет степень r, то значение r совпадает с полустепенью захода вершины v^0 и с полустепенью исхода вершины v^1.

г) формирование ВМЭОГ включает приписывание весов дугам, указанным в пункте (а), для всех вершин исходного графа H .

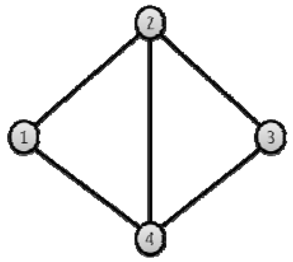
Сформулируем два вывода, завершающих доказательство.

I. Задача о множестве дуг, разрезающих контуры ВМЭОГ, находится в классе NP на том же основании, которое приведено выше для графа D.

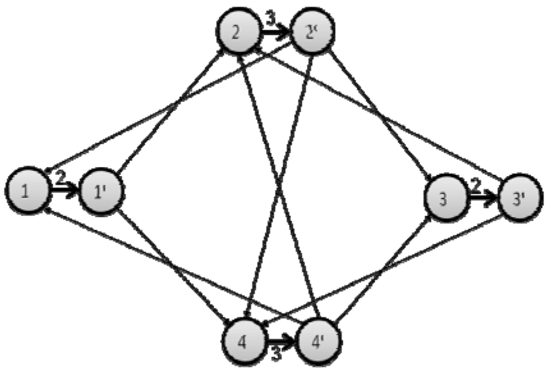
II. NP-полная задача ВП полиномиально преобразуется в задачу о множестве дуг, разрезающих контуры ВМЭОГ, так как это утверждение доказано для графа D.

Теорема доказана.

На рис. 4 приведен пример преобразования графа H в орграф D (вершины обозначены нумерацией). Решение: дуги (2, 2') и (4, 4').



а



б

Рис.4. Неориентированный граф H (а); соответствующий орграф D (б).

Замечание 1. При отыскании множества дуг, разрезающих контуры графа, вес дуг не учитывается.

Замечание 2. Замена в ВМЭОГ каждой дуги, имеющей вес r > 1, множеством, включающим r кратных дуг, приводит к построению классического ЭОГ, в котором определяется система декомпозиции и выполнены все условия существования циклического эйлерова пути. Очевидно, что задача о множестве дуг, разрезающих контуры в ЭОГ, не может быть менее сложной, чем та же задача для ВМЭОГ, так как ЭОГ, построенный на основе ВМЭОГ, содержит дополнительные дуги. Следовательно, эта задача является трудноредшаемой, но не может быть классифицирована как NP-трудная (NP-hard) в связи с отсутствием подходящего полиномиального сведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Ф. *Неортодоксальные модели для задач дискретного анализа и оптимизации*. LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany. – 2012. – 140 с.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. М.: Мир. – 1979. – 535 с.
3. Липский В. *Комбинаторика для программистов*. М.: Мир. – 1988. – 212 с.
4. Наянзин Н.Г., Романов В.Ф. Оптимизация размещения инструментов в магазине многоцелевого станка. *Станки и инструмент*. – 1988. – N 1, – С.27– 29.