УДК 511

ФУНКЦИЯ ДЕЛИТЕЛЕЙ $\tau_3(\mathrm{w})$ В УЗКИХ СЕКТОРАХ

Радова А.С.

ОНУ им. И. И. Мечникова, г. Одесса, Украина

Над кольцом целых гауссовых чисел $Z[i]$ рассматривается функция делителей $\tau_3(w)$, означающая количество представлений целого гауссового числа в виде произведения трёх целых гауссовых чисел. Построена нетривиальная асимптотическая формула для сумматорной функции, ассоциированной с функцией $\tau_3(w)$. Получено распределение значений $\tau_3(w)$ в узких секториальных областях. Метод исследования основан на использовании аппарата Z – функции Гекке.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Гауссовы числа, функция делителей, сумматорная функция, Z–функция Гекке.

ФУНКЦІЯ ДІЛЬНИКІВ $\tau_3(\mathrm{w})$ В ВУЗЬКИХ СЕКТОРАХ

Радова А.С.

Над кільцем цілих гаусових чисел $Z[i]$ розглядається функція дільників $\tau_3(w)$, яка означає кількість подань цілого гауссового числа у вигляді добутку трьох цілих гауссових чисел. Побудована нетривіальна асимптотична формула для суматорної функції, яка асоційована з функцією $\tau_3(w)$. Отримано розподіл значень $\tau_3(w)$ у вузьких секторіальних областях. Метод дослідження заснований на використанні апарату Z – функції Гекке.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гаусові числа, функція дільників, суматорна функція, Z–функція Гекке.

THE DIVISOR FUNCTION $\tau_3(\mathrm{w})$ IN NARROW SECTORS

Radova A.S.

The divisor function $\tau_3(w)$ that is the number of representations of a Gaussian numbers as the product of three Gaussian integers is considered over the ring of Gaussian integers $Z[i]$. A nontrivial asymptotic formula for the sum function associated with the function $\tau_3(w)$ is constructed. The distribution of $\tau_3(w)$ values in narrow sectorial areas is obtained. The method of investigation is based on the use of Z–function Hecke.

KEY WORDS: Gaussian numbers, divisor function, the sum function, Z–function Hecke.

1. Введение. В середине XIX в. Л. Дирихле, изучая количество целых точек под гиперболой, нашёл асимптотическую форму для суммы делителей натуральных чисел,

$$\sum_{n\le x}\tau(n) = x\log x + (2\gamma-1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (1)$$

Эта проблематика оказалась плодотворной в аналитической теории чисел, так как она связана с оценкой остаточного члена во втором моменте дзета-функции Римана. Пильтц, обобщая задачу Дирихле, пришёл к исследованию функции $\tau_k(n)$ – количество представлений n в виде произведения k натуральных чисел. Остаточные члены $\Delta_k(x)$ в асимптотической формуле для сумматорной функции $\sum_{n\le x}\tau_k(n)$, $k = 2,3...$ последовательно улучшались. Так, для $k = 2$ наилучший результат к настоящему времени был найден М. Хаксли, а именно $\Delta_2(x) \ll x^{\frac{23}{73}}(\log x)^{\frac{461}{146}}$. Для $\Delta_3(x)$ наилучший результат принадлежит Г. Коленику $\Delta_3(x) \ll x^{\frac{43}{96}+\varepsilon}$.

В настоящей работе получена нетривиальная оценка для $\Delta_3(x)$ в асимптотической формуле

$$\sum_{N(w)\le x}\tau(w) = xP_2(\log x) + \Delta_3(x).$$

2. Обозначение и вспомогательные результаты.

Всюду в дальнейшем используются следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел; Z – кольцо целых чисел;

C – поле комплексных чисел; G – кольцо целых гауссовых чисел, т. е.

$G = \{a + bi \mid a, b \in Z, i^2 = -1\}$; $\exp(x) = e^x$;

$N(\alpha)$ – норма числа α, т. е.

$N(\alpha) = |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$;

$\tau_3(n)$ – количество представлений n в виде произведения 3 натуральных чисел; $((x))$ – расстояние x до ближайшего целого; символ Виноградова – $\langle\langle$ – означает то же самое, что и символ Ландау "O"; $\varepsilon > 0$ – произвольная малая постоянная; постоянные в символе "O" могут зависеть только от ε.

Пусть $w \in G$, $\lambda_m(w) = e^{4mi\arg w}$. Z–функция Гекке с «Grossencharacter λ» задаётся как аналитическое продолжение функции, заданной рядом

$$Z_m(s) = \sum_{w \in G\setminus\{0\}} \frac{\lambda_m(w)}{N(w)^s}, \ (\sigma = \operatorname{Re} s > 1). \tag{2}$$

Лемма 1. (см. [2]) *Z–функция Гекке, определённая для $\operatorname{Re} s > 1$ рядом (2), допускает аналитическое продолжение на всю комплексную s–плоскость, если $m \neq 0$. А при $m = 0$ $Z_0(s)$ – аналитична во всей s-плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет особенность (простой полюс) с вычетом π. При этом справедливо следующее функциональное уравнение*

$$\begin{aligned} &\pi^{-s}\Gamma(2|m|+s)Z_m(s) = \\ &= \pi^{-(1-s)}\Gamma(2|m|+1-s)Z_{-m}(1-s). \end{aligned} \tag{3}$$

<u>**Лемма 2.**</u> *(Формула Стирлинга). (см. [5])*

Для $\Gamma(s)$ до членов порядка $O(t^{-2})$ при $|t| > 1$, $\sigma > 0$ справедливо

$$\begin{aligned} &\Gamma(\sigma + it) = \sqrt{2\pi} t^{\sigma - \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right) \times \\ &\times e^{i\left(t\log t - t + \frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + \left(\sigma - \sigma^2 - \frac{1}{6}\right)(2t)^{-1} + O\left(t^{-2}\right)\right)} \end{aligned} \tag{4}$$

Имеет место «слабая форма» формулы Стирлинга

$$\Gamma(\sigma + it) \leq t^{\sigma - \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right) \tag{5}$$

Лемма 3. *В области $-\varepsilon \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + \varepsilon$ справедлива оценка*

$$Z_m(s) \langle\langle \left(t^2 + m^2\right)^{1+\varepsilon-\sigma}. \tag{6}$$

Лемма 4.

$$\begin{aligned} &\xi(s)\langle\langle |t|^{\frac{1-\sigma}{3}} \log|t|, \quad \text{если} \quad |t| \geq 3, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ &\xi(\frac{1}{2} + it)\langle\langle |t|^{\theta}, \quad \text{если} \quad \theta < \frac{1}{6}, \quad |t| \geq 3 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\int_1^T \left|\xi(\frac{1}{2} + it)\right|^4 dt \langle\langle T\log T \\ &\int_1^T \left|\xi(\sigma + it)\right|^4 dt \langle\langle T\log^4 T \end{aligned} \tag{8}$$

Лемма 5. *(О стационарной фазе). Пусть $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ – конечный отрезок и выполнены условия:*

1. $f(x) \in C_0^\infty(I)$, $S(x) \in C^\infty(I)$.

2. Функция $S(x)$ имеет при $x \in I$ единственную стационарную точку x_0.

3. $S''(x_0) \neq 0$ (т. е. x_0 – невырожденная стационарная точка).

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\begin{aligned} &F(\lambda; x_0) \equiv \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\exp[i\lambda S(x)]dx = \\ &= \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)\right]\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^{-k} \end{aligned} \tag{9}$$

В частности, при $(\lambda \to +\infty)$

$$\begin{aligned} &F(\lambda; x_0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}\left[f(x_0) + O(\lambda^{-1})\right] \times \\ &\times \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)\right]. \end{aligned}$$

Лемма 6 *(о «стаканчиках» Виноградова). Пусть ρ – целое положительное, α и β – вещественные, $0 < \Delta < 0{,}1$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и со следующими свойствами:*

1. $\psi(x) = 1$ *в интервале* $\alpha + 0{,}5\Delta \leq x \leq \beta - 0{,}5\Delta$,

2. $0 \leq \psi(x) \leq 1$ *в интервалах* $-0{,}5\Delta \leq x \leq \alpha + 0{,}5\Delta$ *и* $\beta - 0{,}5\Delta \leq x \leq \beta + 0{,}5\Delta$,

3. $\psi(x) = 0$ *в интервале* $\beta + 0{,}5\Delta \leq x \leq 1 + \alpha - 0{,}5\Delta$,

4. $\psi(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty}\left(g_m e^{2\pi imx} + h_m e^{-2\pi imx}\right) \tag{10}$$

где g_m и h_m зависят только от m, α, β, Δ, причём $|g_m| \leq \kappa_m$, $|h_m| \leq \kappa_m$;

$$\kappa_m = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi m}, & \text{если} \quad m \leq \Delta^{-1}, \\ \dfrac{1}{\pi m}\left(\dfrac{\rho}{\pi m\Delta}\right)^{\rho}, & \text{если} \quad m > \Delta^{-1}. \end{cases}$$

3. Основные результаты. Пусть $m=0$. Тогда для $\mathrm{Re}\, s>1$ имеем

$$\sum_{0\neq w\in G}\frac{\tau_3(w)}{N(w)^s}=Z_0{}^3(s).$$

Применение формулы Перрона (см. [6]) даёт

$$\sum_{N(w)\le x}\tau_3(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}Z_0{}^3(s)\frac{x^s}{s}ds+ +O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^3}\right)+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T((x))}\right), \tag{11}$$

где $c>1$, $T>1$ – вещественные числа, $\varepsilon>0$ – произвольное положительное малое число, постоянная в символе "O" зависит только от ε.

Заметим, что при $m=0$ справедливо равенство

$$Z_0(s)=4\xi(s)L(s,\chi_4), \tag{12}$$

где $\xi(s)$ – дзета-функция Римана, а $L(s,\chi_4)$ – L-функция Дирихле с неглавным характером χ_4 по модулю 4. Вычислим вычет в точке $s=1$. Найдём разложение $Z_0{}^3(s)$ в ряд Лорана в окрестности точки $s=1$. Мы имеем

$$\xi(s)=\frac{1}{s-1}+a_0+a_1(s-1)+O\left(|s-1|^2\right),$$

где $a_0=E$, E – постоянная Эйлера, $E=0,57721...$,

$$a_1=-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n\le N}\frac{\log n}{n}-\frac{\log^2 N}{2}\right),$$

$$L(s,\chi_4)=L(1,\chi_4)+L'(1,\chi_4)(s-1)+ +\frac{1}{2}L''(1,\chi_4)(s-1)^2+O\left(|s-1|^3\right),$$

$$\text{где } L(1,\chi_4)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4},$$

$$L'(1,\chi_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log n}{2n+1},$$

$$L''(1,\chi_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\log^2 n}{2n+1}.$$

Отсюда, в силу (12), получаем

$$Z_0{}^3(s)=\frac{\pi^3}{(s-1)^3}+\frac{3\pi^2A_0}{(s-1)^2}+ +\frac{3\pi A_1+3\pi A_0{}^2}{s-1}+O(|s-1|).$$

Поэтому $\mathrm{res}_{s=1}(Z_0{}^3(s)\frac{x^s}{s})=xP_2(\log x)$, где

$$P_2(u)=\pi^3u^2+(3\pi^2A_0-\pi^3)u+ +(3\pi^2A_1+3\pi A_0{}^2+3\pi^2A_0-\pi^3),$$

$$A_0=\pi\cdot E+4L'(1,\chi_4),$$

$$A_1=2L''(1,\chi_4)+4EL'(1,\chi_4)+\pi\cdot a_1.$$

Таким образом, перенося контур интегрирования в (11) на прямую $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$, из (11)–(12) получим

$$\sum_{N(w)\le x}\tau_3(w)=xP_2(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}Z_0{}^3(s)\frac{x^s}{s}ds+ +O\left(\int_{1/2}^{c}|Z_0(\sigma\pm iT)|^3\frac{x^\sigma}{T}d\sigma\right)+O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^3}\right)+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T((x))}\right) \tag{13}$$

В силу оценки $Z_0(s)$ в полосе $1/2\le\sigma\le 2$, мы имеем

$$\int_{1/2}^{c}|Z_0(\sigma\pm iT)|^3\frac{x^\sigma}{T}d\sigma\langle\langle\left(\frac{x}{T}\right)^{1/2}+ +\frac{x^c}{T(c-1)^3}+\frac{x^{1+\varepsilon}}{T((x))}. \tag{14}$$

Оценим первый интеграл в (13). Применение неравенства Коши-Шварца даёт

$$\left|\int_{-T}^{T}Z_0{}^3\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{1+it}dt\right|\le\int_1^T\left|\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_4\right)\right|^3\times$$
$$\times\frac{x^{1/2}}{t}dt\le x^{1/2}\int_1^T\left|\xi\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right|^2\cdot\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\times$$
$$\times\max_{1\le t\le T}\left|\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_4\right)\right|\frac{dt}{t}\le x^{1/2}T^{2\theta}\times \tag{15}$$
$$\left(\int_1^T\left|\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\left(\int_1^T\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_4\right)\right|^4\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\le$$
$$\le x^{\frac{1}{2}}T^{2\theta}\log^5 T.$$

Из (13)–(15), выбирая $c=1+\varepsilon$, $T=x^{\frac{1}{2}}$, x – равным половине нечётного числа, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 1. *При* $x\to\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$T_0(x):=\sum_{\substack{w\in G\\ N(w)\le x}}\tau_3(w)=xP_2(\log x)+O(x^{\frac{1}{2}+\theta}\log^5 x) \tag{16}$$

с абсолютной постоянной в символе "O".

Рассмотрим сектор

$S(\phi_1,\phi_2):=\{z\in C\,|\,\phi_1\le\arg w\le\phi_2\}$, где

$0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \frac{\pi}{2}$. Нас будет интересовать распределение значений функции $\tau_3(w)$ в секторных областях $S(\phi_1,\phi_2)$ при малых значениях раствора $\phi_2 - \phi_1$ сектора $S(\phi_1,\phi_2)$. Мы имеем для $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$\sum_{0\ne w\in G} \frac{\tau_3(w)e^{4mi\arg w}}{N(w)^s} = Z_m{}^3(s).$$

Поэтому, в силу формулы Перрона, при $m \ne 0$ имеем

$$\sum_{N(w)\le x} \tau_3(w)e^{4mi\arg w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} Z_m{}^3(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T((x))}\right). \tag{17}$$

Здесь $c = 1+\varepsilon$, $T > 1$.

Перенесём контур интегрирования в (17) на прямую $\mathrm{Re}\, s = -b$ (b будет уточнено позже). В силу Леммы 3 имеем

$$T_m(x) := \sum_{N(w)\le x} \tau_3(w)e^{4mi\arg w} = \frac{1}{2\pi i}\times \int_{-b-iT}^{-b+iT} Z_m{}^3(s)\frac{x^s}{s}ds + O(T^{\frac{3(1+b)}{2}-1}x^{-b}) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T(x)}\right). \tag{18}$$

Используя функциональное уравнение для $Z_m{}^3(s)$, находим

$$\sum_{N(w)\le x} \tau_3(w)e^{4mi\arg w} = \frac{\pi^3}{x^b}\sum_{0\ne w\in G}\frac{e^{-4mi\arg w}}{N(w)^{1+b}}\cdot I(w) + , +O(T^{\frac{1+3b}{2}}x^{-b}) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T((x))}\right). \tag{19}$$

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-b-iT}^{-b+iT} \frac{\Gamma^3(2|m|+1+b-it)}{\Gamma^3(2|m|-b+it)}\times \left(\pi^6 xN(w)\right)^{it}\frac{dt}{-b+it}. \tag{20}$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга для Γ-функции (см. Лемма 2), получим

$$\frac{\Gamma^3(2|m|+1+b-it)}{\Gamma^3(2|m|-b+it)} = \exp\Big[3it(2 - \log(4m^2+t^2) + \frac{2|m|+1}{4m^2+t^2} + \frac{(2|m|+1)^2}{(4m^2+t^2)^2})\Big]\times \exp\left(-\frac{3b}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3t^2}{16}\left(4m^2+2|m|+t^2\right)^{-1}\right)\times \left(2m^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}+3b}\left(1+O\left(\left(m^2+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \tag{21}$$

Если $|m| \ge T$, то $I(w)$ оцениваем тривиально

$$I(w) \langle\langle |m|^{3(1+2b)}\log T \tag{22}$$

Если же $|m| < T$, то имеем

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-T}^{-|m|} + \int_{|m|}^{T}\right) + O\left(|m|^{3(1+2b)}\log T\right) = = I_1(w) + I_2(w) + O\left(|m|^{3(1+2b)}\log T\right) \tag{23}$$

Интегралы $I_1(w)$, $I_2(w)$ вычисляются одинаково, поэтому рассмотрим только $I_2(w)$. Поскольку в $I_2(w)$:

$2|m| < t \le T$, то

$$\log(2m^2+t^2) = 2\log t + O\left(\frac{m^2}{t^2}\right).$$

Так что имеем при $y = \pi^6 xN(w)$

$$I_2(w)\langle\langle \left|\int_{|m|}^{T} t^{\frac{3}{2}}e^{6it(1-\log(ty^{-\frac{1}{6}}))}dt\right| + O\left(T^{\frac{3}{2}+6b}\right) = = I_2'(w) + O(T^{\frac{3}{2}+6b}). \tag{24}$$

Интеграл $I_2'(w)$ можно вычислить с помощью метода стационарной фазы (см. Лемма 5). Положим $t = y^{\frac{1}{6}}u$. Тогда

$$I_2'(w) = y^{\frac{5}{12}+b}\int_{|m|y^{-\frac{1}{6}}}^{Ty^{-\frac{1}{6}}} u^{\frac{3}{2}+6b}e^{i\lambda(u-u\log u)}du, \tag{25}$$

где $\lambda = 6y^{\frac{1}{6}}$. Положим $h(u) = u(1-\log u)$. Очевидно, что $h'(u)$ обращается в нуль в единственной точке $u = 1$, при этом $h''(1) \ne 0$. Если $\frac{m^6}{4\pi^6 x} > N(w)$ или $N(w) > \frac{16T^6}{\pi^6 x}$, то стационарная точка $u = 1$ не попадаёт на промежуток интегрирования, причём $|h'(u)| \ge \log 2$ для таких w.

Таким образом, для $N(w) < \frac{m^6}{4\pi^6 x}$ или $N(w) > \frac{16T^6}{\pi^6 x}$ имеем

$$I_2'(w)\langle\langle T^{\frac{3}{2}+6\varepsilon} \tag{26}$$

Для $\frac{m^6}{4\pi^6 x} \le N(w) \le \frac{16T^6}{4\pi^6 x}$ Лемма 5 даёт

$$I_2'(w) \langle\langle y^{\frac{5}{12}+b} \lambda^{-\frac{1}{2}} \langle\langle y^{\frac{1}{3}+b} = \left(xN(w)\right)^{\frac{1}{3}+b} \quad (27)$$

Итак, из (23), (24), (26), (27) находим

$$I(w) \langle\langle \begin{cases} \left(xN(w)\right)^{\frac{1}{3}+b}, & \text{если } \dfrac{m^6}{4\pi^6 x} \le N(w) \le \dfrac{16T^6}{4\pi^6 x}, \\ & |m| < T; \\ T^{\frac{3}{2}+6\varepsilon}, & \text{если } N(w) \notin \left[\dfrac{m^6}{4\pi^6 x}, \dfrac{16T^6}{4\pi^6 x}\right], \\ & |m| < T; \\ |m|^{3(1+2b)} \log T, & \text{если } |m| \ge T. \end{cases} \quad (28)$$

Из соотношений (18), (19), (28) мы получаем следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть* $m \in Z \setminus \{0\}$. *Тогда*

$$\left|T_m(x)\right| \langle\langle \begin{cases} |m|^{3+\varepsilon} \log x, & \text{если } m \ge x^{\frac{1}{3}}, \\ x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}, & \text{если } m < x^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Доказательство. В самом деле, положим x, равным половине целого нечётного числа, тогда для $|m| \ge T$, в

$$\left|T_m(x)\right| \langle\langle |m|^{3(1+2b)} \log x + T^{\frac{1+3b}{2}} x^{-b} + x^{1+\varepsilon} T^{-1} \quad (29)$$

Для $|m| < T$ из (28) и (19) находим

$$\left|T_m(x)\right| \langle\langle \sum_{N(w) \le \frac{m^6}{4\pi^6 x}} \frac{|I(w)|}{x^b N(w)^{1+b}} + \sum_{\frac{m^6}{4\pi^6 x} < N(w) < \frac{16T^6}{4\pi^6 x}} \frac{|I(w)|}{x^b N(w)^{1+b}} +$$

$$+ \sum_{N(w) \ge \frac{16T^6}{\pi^6 x}} \frac{|I(w)|}{N(w)^{1+b}} x^{-b} + T^{\frac{1+3b}{2}} x^{-b} + x^{1+\varepsilon} T^{-1} = \quad (30)$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + T^{\frac{1+3b}{2}} x^{-b} + x^{1+\varepsilon} T^{-1}.$$

Теперь из (28) сразу следует

$$\begin{aligned} &\Sigma_1, \Sigma_3 \langle\langle x^{-b} T^{\frac{3}{2}+6b}, \\ &\Sigma_2 \langle\langle x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}b} T^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = T^2 x^{-\frac{1}{3}b}. \end{aligned} \quad (31)$$

Положим $T = x^{\frac{1}{3}}$, $b = \dfrac{\varepsilon}{6}$. Тогда для $|m| \le x^{\frac{1}{3}}$ получаем

$$\left|T_m(x)\right| \langle\langle x^{\frac{2}{3}+\varepsilon} \quad (32)$$

с постоянной в символе "$\langle\langle$", зависящей только от ε. Из (29)–(32) следует утверждение теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \dfrac{\pi}{2}$. *Тогда при* $\phi_2 - \phi_1 \ge \dfrac{\log^5 x}{x^{\frac{3}{2}+\theta}}$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{\phi_1 \le \arg w \le \phi_2 \\ N(w) \le x}} \tau_3(w) = \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\pi} x P_2(\log x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \log^5 x).$$

Доказательство. В Лемме 6 возьмём $\varOmega = \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \varDelta < \dfrac{\pi}{2}$ (параметр $\varDelta$ выберем позднее). Пусть функции $f(\phi)$ удовлетворяет условиям Леммы 6.

Рассмотрим функцию $\varPhi(\phi_1, \phi_2) = \sum\limits_{N(w) \le x} \tau_3(w) f(4 \arg w)$. Тогда

$$\varPhi(\phi_1, \phi_2) = \sum_{N(w) \le x} \tau_3(w) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{4mi \arg w} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \sum_{N(w) \le x} \tau_3(w) e^{4mi \arg w} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m T_m(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(\phi_2 - \phi_1 + \varDelta) T_0(x) + \quad (33)$$

$$+ O\left(\sum_{0 < |m| < \delta} |a_m| \cdot |T_m(x)|\right) + O\left(\sum_{|m| > \delta} |a_m| \cdot |T_m(x)|\right),$$

где $\varDelta^{-1} = \delta = x^{\frac{1}{2}-\theta} \log^{-4} x$. В соотношении (30) пользуемся оценкой

$$|a_m| \le \begin{cases} 2(\pi |m|)^{-1}, & \text{если } |m| \le \delta, \\ \dfrac{2}{\pi |m|} \left(\dfrac{4\varOmega}{\pi |m| \varDelta}\right)^4, & \text{если } |m| > \delta. \end{cases} \quad (34)$$

Тогда, в силу Теорем 1 и 2, находим

$$\varPhi(\phi_1, \phi_2) = \frac{2}{\pi}(\phi_2 - \phi_1 + \varDelta) T_0(x) +$$

$$+ O\left(\sum_{1 \le |m| \le \delta} \frac{1}{m} |T_m(x)|\right) + O\left(\sum_{m > \delta} m^{-5} \varDelta^{-4} |T_m(x)|\right) = \quad (35)$$

$$= \frac{2}{\pi}(\phi_2 - \phi_1) x P_2(\log x) + O\left(\varDelta x \log x\right) + O(x^{\frac{1}{2}+\theta} \log^5 x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(\phi_2 - \phi_1) x P_2(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\theta} \log^5 x).$$

Кроме того, аналогично получаем

$$\Phi(\phi_1-\Delta,\phi_1)\langle\langle x^{\frac{1}{2}+\theta}\log^5 x,$$
$$\Phi(\phi_2,\phi_2+\Delta)\langle\langle x^{\frac{1}{2}+\theta}\log^5 x. \qquad (36)$$

Учитывая равенство

$$T(x,\phi_1,\phi_2):=\sum_{\substack{w\in G\\ \phi_1\le\arg w\le\phi_2\\ N(w)\le x}}\tau_3(w)=$$
$$=\Phi(\phi_1,\phi_2)+\eta_1\Phi(\phi_1-\Delta,\phi_1)+\eta_2\Phi(\phi_{2,},\phi_2+\Delta),$$

где $|\eta_1|\le 1$, $,|\eta_2|\le 1$ получаем утверждение теоремы 3.

Из теоремы 3 следует, что значения функции $\tau_3(w)$ равномерно распределены по узким секторам $\phi_1\le\arg w\le\phi_2$, $\phi_2-\phi_1\rangle\rangle x^{-\frac{1}{2}-\theta}\log^5 x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И.М. *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*. М., Наука. – 1971. – 160 с.
2. Hecke E. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen., I, II. *Math. Zeitschr*. – 1920. – v. 6, N 1–2. – P. 11–51.
3. Ivic A. *The Riemann Zeta-Function*. Dover Public., Mincola, New-York. – 1985.
4. Olver F. *Asymptotic and Special Functions*. Press, New-York. – 1974.
5. Kolesnik G. On the estimation of multiple exponential sums. *Recent Progress in Analytic Number Theory, Simposium Durham*, Vol.1. – 1979 P. 231–246.
6. Прахар К. *Распределение простых чисел*. М., Мир. – 1967. – 511 с.
7. Федорюк М. В. *Метод перевала*. М., Наука. – 1977. – 368 с.