УДК 004:378.1:519.6

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД ДЛЯ ПОДБОРА МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖОНСОНА

Приходько С.Б.

Национальный университет кораблестроения, Николаев, Украина

Предложен непараметрическй подход для подбора многомерного преобразования Джонсона с учетом корреляции между компонентами вектора нормализованных случайных величин. Рассмотрен подбор двумерного преобразования Джонсона для системы двух случайных величин – угла и угловой скорости бортовой качки судна на нерегулярном волнении. Выполнена оценка параметров нелинейного стохастического дифференциального уравнения бортовой качки судна обобщенным методом моментов на основе двумерного преобразования Джонсона семейства S B.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многомерное преобразование Джонсона, случайные величины, стохастические дифференциальные уравнения.

НЕПАРАМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ПІДБОРУ БАГАТОМІРНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЖОНСОНА

Приходько С.Б.

Запропоновано непараметричний підхід для підбору багатовимірного перетворення Джонсона з урахуванням кореляції між компонентами вектора нормалізованих випадкових величин. Розглянуто підбір двовимірного перетворення Джонсона для системи двох випадкових величин – кута і кутової швидкості бортової качки судна на нерегулярному хвилюванні. Виконано оцінку параметрів нелінійного стохастичного диференціального рівняння бортової качки судна узагальненим методом моментів на основі двовимірного перетворення Джонсона сімейства S B.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: багатовимірне перетворення Джонсона, випадкові величини, стохастичні диференціальні рівняння.

NONPARAMETRIC APPROACH TO SELECTION OF MULTIDIMENSIONAL JOHNSON TRANSFORMATION

Prikhodko SB

A nonparametric approach to selection of multidimensional Johnson transformation accounting for correlations between the components of the vector of normalized random variables is proposed. Selection of two-dimensional Johnson transformation for a system of two random variables, namely the angle and angular velocity of ship rolling by irregular waves is considered. The parameters of nonlinear stochastic differential equation of the rolling by generalized method of moments based on a two-dimensional Johnson transformation of S B family are estimated

KEY WORDS: multidimensional Johnson transformation, random variables, stochastic differential equation.

1. Введение. В настоящее время многомерное преобразование Джонсона применяется для нормализации и построения различных математических моделей [1], в том числе и нелинейных стохастических дифференциальных систем (СДС) [2, 3]. Это преобразование записывается как [1]

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{h}\left[\boldsymbol{\lambda}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\phi}\right)\right] \ , \qquad (1)$$

где $\mathbf{z}$ – вектор нормализированных случайных величин;

$\mathbf{h}\left[\left(y_1, y_2, \ldots, y_m\right)^T\right] = \left\{h_1(y_1), h_2(y_2), \ldots, h_m(y_m)\right\}^T$,

$\mathbf{z} = \left(z_1, z_2, \ldots, z_m\right)^T$,

$h_k(\cdot)$ – функция одномерного преобразования Джонсона для k-ой компоненты,

$$h_k = \begin{cases} \ln y_k, & x_k > \phi, & \text{семейство } S_L; \\ \ln\left[y_k/(1-y_k)\right], & \phi < x_k < \phi+\lambda, & \text{семейство } S_B; \\ \operatorname{Arsh}(y_k), & -\infty \le x_k \le +\infty, & \text{семейство } S_U, \end{cases}$$

$k \in [1, m]$; S_L, S_B и S_U – обозначения семейств преобразования Джонсона [1], означающие соответственно логнормальное, ограниченное и неограниченное; $y_k = (x_k - \phi_k)/\lambda_k$; $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ – параметры преобразования (1), $\boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\right)^T$, $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m\right)^T$, $\boldsymbol{\eta} = \operatorname{diag}\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m\right)$,

$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$; $\mathbf{x}$ – вектор случайных величин, которые нормализуются, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$.

Отметим, что $\mathbf{z}$ имеет многомерное распределение Гаусса с нулевым вектором математического ожидания $\mathbf{m_z}$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{z_{12}} & \dots & \rho_{z_{1m}} \\ \rho_{z_{21}} & 1 & \dots & \rho_{z_{2m}} \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ \rho_{z_{m1}} & \rho_{z_{m2}} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $\rho_{z_{kl}} = \mathrm{M}\left\{\left(z_k - m_{z_k}\right)\left(z_l - m_{z_l}\right)\right\} \Big/ \sqrt{D_{z_k} D_{z_l}}$; $\mathrm{M}\{\cdot\}$ – операция математического ожидания; $m_{z_k} = \mathrm{M}\{z_k\}$; $D_{z_k} = \mathrm{M}\left\{\left(z_k - m_{z_k}\right)^2\right\}$; $k \in [1, m]$; $l \in [1, m]$.

До настоящего времени не известно применение непараметрического подхода для подбора многомерного преобразования Джонсона в общем случае, когда необходимо учитывать соответствующие корреляции. Это повидимо можно пояснить тем, что, во-первых, для семейств распределений Джонсона кроме двумерной [1] не получены многомерные функции плотности вероятности (ФПВ), а, во-вторых, сложностью решения задачи даже при наличии ФПВ. Поэтому цель работы состоит в том, чтобы предложить непараметрический подход для подбора многомерного преобразования Джонсона в общем случае, когда необходимо учитывать корреляции между компонентами вектора нормализованных случайных величин $\mathbf{z}$. В работе для подбора многомерного преобразования (1) предлагается непараметрический подход, суть которого состоит в следующем. Сначала по выборкам значений каждой случайной величины находят соответствующие оценки эксцесса и асимметрии, по которым по диаграмме Джонсона выбирают определенное семейство: S_L, S_B или S_U. Далее в зависимости от выбранного семейства оценивают параметры m-мерного преобразования Джонсона в результате решения задачи

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} A_{z_k}^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\varepsilon_{z_k} - 3\right)^2 + \sum_{k=1}^{m} \overline{z}_k^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(S_{z_k}^2 - 1\right)^2 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=k+1}^{m} \left(\rho_{z_{kl}} - \rho_{kl}\right)^2 \right\}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – вектор неизвестных параметров, $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \phi\}$; $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – оценка вектора $\boldsymbol{\theta}$;

$$A_{z_k} = \frac{1}{n S_{z_k}^3} \sum_{i=1}^{n} \left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^3; \quad \varepsilon_{z_k} = \frac{1}{n S_{z_k}^4} \sum_{i=1}^{n} \left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^4;$$

$$\rho_{z_{kl}} = \frac{1}{n S_{z_k} S_{z_l}} \sum_{i=1}^{n} \left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)\left(z_{l_i} - \overline{z}_l\right);$$

$$S_{z_k}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(z_{k_i} - \overline{z}_k\right)^2; \quad \overline{z}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{k_i}; \quad \rho_{kl} = \sin\left(\frac{\pi}{2} r_{kl}\right);$$

r_{kl} – kl-й элемент корреляционной матрицы Кендалла,

$$r_{kl} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \mathrm{sign}\left(\left(x_{k_i} - x_{k_j}\right)\left(x_{l_i} - x_{l_j}\right)\right);$$

x_{k_i} і x_{l_i} – i-тые значения соответственно случайных величин x_k и x_l в выборках длиною n, $i \in [1, n]$; z_{k_i} и z_{l_i} – i-тые значения соответственно нормализованных случайных величин z_k и z_l в выборках длиною n, $i \in [1, n]$, определяются по преобразованию (1).

Для иллюстрации предложенного непараметрического подхода рассмотрим подбор двумерного преобразования Джонсона для системы случайных величин x_1 и x_2 с оценкой его параметров по (2). В качестве значений случайных величин x_1 и x_2 возьмем по 2000 значений угла и угловой скорости бортовой качки судна на нерегулярном волнении, которые получены в результате компьютерного моделирования по следующим разностным уравнениям [4]:

$$\begin{aligned} x_{1_{i+1}} &= x_{1_i} + x_{2_i} \Delta t; \\ x_{2_{i+1}} &= x_{2_i} - \left(b_1 x_{2_i} + c_1 x_{1_i} + c_3 x_{1_i}^3\right) \Delta t + \zeta_i \sqrt{N_0 \Delta t}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ζ_i – i-е значение нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Значения b_1, c_1, c_3, N_0, $x_1(0)$ и $x_2(0)$ соответственно равны 0,02, 1, -1, $4,44 \cdot 10^{-4}$, 0,2323, $-0,3594$.

Уравнения (3) построены путем применения метода Эйлера к системе уравнений 1-го порядка, полученной путем преобразования с использованием подстановок $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$ стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$\ddot{x} + b_1 \dot{x} + c_1 x + c_3 x^3 = n(t), \quad (4)$$

где $n(t)$ – белый шум с коэффициентом интенсивности N_0.

В результате решения задачи (2) найдены оценки параметров $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)^T$, $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ и $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ преобразования (1) для двумерного случая. Для этого сначала по выборкам значений x_1 и x_2 были определены оценки асимметрии A_{x_1} и A_{x_2}, а также эксцесса ε_{x_1} и ε_{x_2}: $A_{x_1} = -0,004121$, $A_{x_2} = -0,002564$,

$\varepsilon_{x_1}=1{,}510$, $\varepsilon_{x_2}=1{,}530$, по которым было выбрано семейство S_B. Значение $\rho_{x_{12}}$ равно $-1{,}760\cdot10^{-2}$. Далее в результате решения задачи (2) были определены оценки параметров преобразования Джонсона для семейства S_B: $\gamma_1=0{,}043317$, $\gamma_2=-0{,}012035$, $\eta_1=0{,}462324$, $\eta_2=0{,}499123$, $\lambda_1=0{,}836548$, $\lambda_2=0{,}82390$, $\phi_1=-0{,}410378$ и $\phi_2=-0{,}417536$. Для случайных величин z_1 и z_2 найденные оценки асимметрии ($A_{z_1}=-3{,}162\cdot10^{-4}$; $A_{z_2}=-7{,}712\cdot10^{-4}$) и эксцесса ($\varepsilon_{z_1}=2{,}9998$; $\varepsilon_{z_2}=2{,}9991$) приближенно соответствуют нормальному закону. При этом $z_1\in[-3{,}0775;\,3{,}9736]$, $z_2\in[-5{,}0224;\,4{,}2414]$, минимальное значение целевой функции в (2) составляет $1{,}9763\cdot10^{-4}$, значение $\rho_{z_{12}}$ равняется $-1{,}4015\cdot10^{-2}$, выборочное среднее и дисперсия случайных величин z_1 и z_2 такие: $\overline{z}_1=7{,}713\cdot10^{-4}$, $\overline{z}_2=-6{,}166\cdot10^{-6}$, $S^2_{z_1}=0{,}999993$ і $S^2_{z_2}=1{,}00001$.

Применение нормализирующих преобразований позволяет существенно упростить решение задачи оценивания параметров нелинейных СДУ при использовании известных методов, например, таких как, метод моментов, обобщенный метод моментов (ОММ). В случае ОММ упрощение происходит за счет уменьшения размеров вектора моментных условий и весовой матрицы для нормализованного СДУ. Так, при оценке параметров СДУ 2-го порядка вектор моментных условий состоит из 5 компонент (вместо 14), а весовая матрица содержит всего 25 элементов (вместо 196). При этом точность оценок параметров СДУ при применении нормализирующих преобразований изменяется незначительно [4].

Точечные оценки параметров СДУ (компонент вектора $\mathbf{\Theta}$) могут быть определены следующим образом. Сначала на основе нормализирующего преобразования по СДУ (4) необходимо найти СДУ для нормализованного случайного процесса $\mathbf{z}(t)$ или нормализованное СДУ. Далее – выполнить оценку неизвестных параметров (компонент вектора $\mathbf{\Theta}$) СДУ для $\mathbf{z}(t)$, используя, например, ОММ, суть которого состоит в решении следующей задачи:

$$\hat{\mathbf{\Theta}}=\arg\min_{\mathbf{\Theta}}\left\{\mathbf{m}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})\right\}^{T}\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})\left\{\mathbf{m}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})\right\}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})$ – вектор моментных условий; $\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})$ – весовая матрица; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор статистических моментов.

Для СДУ (4) строим нормализованное СДУ. Сначала записываем для семейства S_B компоненты преобразования (1) и компоненты обратного к (1) преобразования для компонент векторов $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$

$$z_1=\gamma_1+\eta_1\ln\left[\tilde{x}_1/(1-\tilde{x}_1)\right]=\gamma_1+2\eta_1\operatorname{arth}(2\tilde{x}_1-1);$$

$$z_2=\gamma_2+\eta_2\ln\left[\tilde{x}_2/(1-\tilde{x}_2)\right]=\gamma_2+2\eta_2\operatorname{arth}(2\tilde{x}_2-1);$$

$$x_1=\phi_1+\frac{\lambda_1}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{z_1-\gamma_1}{2\eta_1}\right)\right];$$

$$x_2=\phi_2+\frac{\lambda_2}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{z_2-\gamma_2}{2\eta_2}\right)\right].$$

Тут $\tilde{x}_1=(x_1-\phi_1)/\lambda_1$; $\tilde{x}_2=(x_2-\phi_2)/\lambda_2$.

Формируем компоненты нормализованного СДУ

$$\dot{z}_1=\frac{4\eta_1}{\lambda_1}\operatorname{ch}^2\left(\frac{z_1-\gamma_1}{2\eta_1}\right)\left\{\phi_2+\frac{\lambda_2}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{z_2-\gamma_2}{2\eta_2}\right)\right]\right\};\qquad(6)$$

$$\dot{z}_2=\frac{4\eta_2}{\lambda_2}\operatorname{ch}^2\left(\frac{z_2-\gamma_2}{2\eta_2}\right)\left\{n(t)-b_1\left(\phi_2+\frac{\lambda_2}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{z_2-\gamma_2}{2\eta_2}\right)\right]\right)-c_1\left(\phi_1+\frac{\lambda_1}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{z_1-\gamma_1}{2\eta_1}\right)\right]\right)-c_3\left(\phi_1+\frac{\lambda_1}{2}\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{z_1-\gamma_1}{2\eta_1}\right)\right]\right)^3\right\}.\qquad(7)$$

Далее на основе (6)–(7) получаем вектор моментных условий $\mathbf{m}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})$ и весовую матрицу $\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})$ для $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$, $\dot{z}_1\dot{z}_2$, $\dot{z}_1^2$, $\dot{z}_2^2$. В качестве матрицы $\mathbf{\Omega}(\mathbf{\Theta},\boldsymbol{\alpha})$ используем матрицу обратную корреляционной.

Результаты оценки параметров СДУ (4) ОММ, реализованным на основе исходного СДУ (4) и компонент нормализованного СДУ (6)–(7) приведены в таблице 1. Данные таблицы указывают на то, что относительная погрешность между значениями оценок параметров полученных в результате решения задачи (5) на основе исходного СДУ (4) и компонент нормализованного СДУ (6)–(7) не превышает 5%. При этом относительная погрешность между оценками параметров и их точными значениями не превышает 7%.

Таблица 1. Результаты оценки параметров СДУ (4).

Оцениваемые параметры	***Значения оценок параметров на основе исходного СДУ (4)***	***Значения оценок параметров на основе компонент (6)–(7)***
b_1	0.0186	0.0195
c_1	1.0501	1.0566
c_3	–0.9947	–0.9933

3. Выводы. Полученные результаты свидетельствуют о работоспособности предложенного непараметрического подхода для подбора многомерного преобразования Джонсона (1) в общем случае, когда необходимо учитывать корреляции между компонентами вектора нормализованных случайных величин $\mathbf{z}$. На основе преобразования (1) показана возможность решения задачи оценивания параметров нелинейных СДУ.

При этом применение преобразования (1) позволяет существенно упростить решение задачи оценивания параметров нелинейных СДУ обобщенным методом моментов за счет уменьшения размеров вектора моментных условий и весовой матрицы для нормализованного СДУ.

В дальнейшем планируется при подборе многомерного преобразования Джонсона (1) рассмотреть другие способы учета корреляций между компонентами вектора $\mathbf{z}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stanfield P.M., Wilson J.R., Mirka G.A., Glasscock N.M., Psihogios J.P., Davis J.R. Multivariate input modeling with Johnson distributions. In: *Proc. of the 28th Winter simulation conference WSC'96*, Coronado, CA, USA, S. Andradóttir, K.J. Healy, D.H. Withers, and B.L.Nelson (eds.). IEEE Computer Society Washington, DC, USA. – 1996. – P.1457–1464.

2. Приходько С.Б. Багатовимірні перетворення для нормалізації математичних моделей нелінійних стохастичних диференціальних систем. *Науковий журнал "Математичне моделювання"*. – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2009. – N 1 (20) – С.12–15.

3. Приходько С.Б. Применение нормализующих преобразований для построения математических моделей нелинейных стохастических дифференциальных систем. *Электронное моделирование*. – 2011. – т.33. – N 2. – С.13–23.

4. Приходько С.Б. Оценка параметров нелинейных стохастических дифференциальных уравнений на основе нормализирующих преобразований. *Вестник Харьковского национального университета. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления*. – 2012. – N 1015 (19). – С.276–282.