УДК 514.764.2

ЛОКАЛЬНО ЗАДАННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Попов В.А.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Изучается возможность аналитического продолжения изометрии между двумя связными открытыми подмножествами псевдориманова аналитического многообразия до изометрии многообразия в целом. Основной результат состоит в следующем. Пусть ς − алгебра Ли всех инфинитезимальных изометрий псевдориманова аналитического многообразия и $\eta \subset \varsigma$ − её стационарная подалгебра, G − односвязная группа, соответствующая алгебре ς и $H \subset G$ − её подгруппа, соответствующая подалгебре $\eta \subset \varsigma$. Тогда, если ς не имеет центра, то H замкнута в G.

К*ЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА*: изометрия, аналитические псевдоримановы пространства.

ЛОКАЛЬНО ЗАДАНІ ІЗОМЕТРІЇ ПСЕВДОРІМАНОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Попов В.А.

Вивчається можливість аналітичного продовження ізометрії між двома зв'язними відкритими підмножинами псевдоріманова аналітичного багатовиду до ізометрії багатовиду в цілому. Основний результат полягає в наступному. Нехай ς – алгебра Лі всіх інфінітезімальних ізометрій псевдоріманoвиа аналітичного багатовиду і $\eta \subset \varsigma$ – її стаціонарна підалгебра, G – однозв'язна група, яка відповідає алгебрі ς, та $H \subset G$ – її підгрупа, яка відповідає підалгебрі $\eta \subset \varsigma$. Тоді, якщо ς не має центру, то H замкнута в G.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ізометрія, аналітичні псевдоріманови простори.

LOCALLY GIVEN ISOMETRY OF PSEUDO-RIEMANNIAN ANALYTIC SPACES

Popov V.A.

The possibility of analytic continuation of isometry between two connected open subset of analytic pseudo-Riemanian manifold to an isometry of the manifold in general. The main result is the following. Let ς is Lie algebra of all infinitesimal isometries of pseudo-Riemannian analytic manifold, and $\eta \subset \varsigma$ is its stationary subalgebra, G is 1-connected Lie group corresponding to the algebra ς and $H \subset G$ is its subgroup corresponding to the subalgebra $\eta \subset \varsigma$. Then, if ς has no center, H is closed in G.

KEY WORDS: isometrics, analytic pseudo-Riemannian spaces.

1. Введение. Аналитическое отображение открытого подмножества U аналитического пространства M в аналитическое пространство N может допукать аналитическое продолжение на всё пространство M. особый интерес представляет изучение аналитического продолжения локально заданных изометрий риманова или пседориманова многообразия. Несложно доказать. что изометрия $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ между двумя открытыми подмножествами полного односвязного риманова многообразия M аналитически продолжается до изометрии $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$. Однако. далеко не всегда локально заданную риманову аналитическую метрику можно аналитисески продолжить до метрики полного многообразия. Естественым обобщением понятия полного многообразия является понятие непролжаемости, рассмотренное ещё в классической монографии Хелгасона [1]. Изучению непролжаемых собственно римановых многообразий и возможности продолжения локально заданных на них изометрий посвящены работы [2], [3]. Приведём обобщение результатов работы [3] на случай псевдориманова многообразия. В частности, докажем, что если на шаре задана псевдориманова метрика, алгебра Ли инфинитеземальных изометрий которой имеет нулевой центр и её размерность в фиксиронной точке совпадает с размерностью шара. то эта метрика продолжается до метрики полного пседориманова многобразия.

2. Основные результаты. Рассмотрим псевдориманово аналитическое многообразие M и изометрию $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ между его открытыми подмножествами. Возникает вопрос, при каких условиях отображение $\varphi : U \to V$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$ всего многообразия. Возможность продолжения вдоль непрерывной кривой для полного многообразия доказана в классической монографии С. Хелгасона [1]. Однако, даже при наличии полноты продолжение вдоль кривых может быть неоднозначным. В случае же не полного многообразия аналитическое продолжение локально заданной изометрии вдоль произвольной кривой невозможно. Но оказывается всегда возможно продолжение инфинитезимальной изометрии.

Инфинитезимальные изометрии на римановом многообразии — это векторные поля $\xi^k(x)$, удовлетворяющие следующей системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k - g_{kj}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\right) = 0 .$$

Такие векторные поля называются векторными полями Киллинга.

Теорема 1. Пусть M — аналитическое псевдориманово многообразие, X — векторное поле Киллинга, заданное в области $U \subset M$ и пусть $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, такая непрерывная кривая в M, что $\gamma(0) \in U$. Тогда векторное поле X аналитически продолжаемо вдоль γ.

Доказательство. Предположим, что X аналитически продолжаемо в окрестность любой точки $\gamma(t)$ при $t < t_1 \le 1$. Докажем, что X продолжается и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Пусть V — нормальная окрестность точки q, являющаяся нормальной окрестностью каждой из своих точек ([1]). Рассмотрим $t < t_1$ такое, что $p = \gamma(t) \in V$.

Векторное поле X порождает локальную однопараметрическую группу изометрий φ_s в окрестности каждой точки $\gamma(t)$, $t < t_1$. Докажем, что для всех достаточно малых значений s локальные изометрии φ_s аналитически продолжаются и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Тогда векторное поле скоростей этой локальной группы изометрий и будет аналитическим продолжением векторного поля X в окрестность точки q.

Рассмотрим связное открытое множество $V_0 \subset V$, содержащее точки p и q, замыкание которого также принадлежит V, $\overline{V_0} \subset V$, $p,q \in V_0$. Рассмотрим малую окрестность $V' \subset V_0$ точки q и соединим точку p отрезком геодезической $\alpha(t)$, $0 \le t \le 1$, с произвольной точкой $q' \in V'$. Пусть $Y = \frac{d\alpha}{dt}(0) \in T_pM$ и $p_s = \varphi_s(p)$, $Y_s = \varphi_s(Y)$. Из точки p_s проведём геодезическую $\beta(t)$, $0 \le t \le 1$, такую, что $\frac{d\beta}{dt}(0) = Y_s$. При достаточно малых значениях s $\beta(t) \in V_0$, $0 \le t \le 1$. Положим $\varphi_s\left(q'\right) = \beta(1)$. Полученное таким образом отображение и есть аналитическое продолжение изометрии φ_s.

Замечание. Приведённое выше доказательство позволяет перенести утверждение теоремы 1 на пространства аффинной связности. А именно. Инфинитезимальное аффинное преобразование X аналитического пространства аффинной связности M, заданное на открытом множестве $U \subset M$, аналитически продолжаемо вдоль любой непрерывной кривой $\gamma(t)$ на M.

Принципиальная невозможность продолжения инфинитеземальной изометрии до изометрии многообразия M в целом в общем случае заключается в том, что пара, состоящая из алгебры Ли ζ и её стационарной подалгебры $\eta \subset \zeta$ может не порождать однородного многообразия. Точнее, при условии продолжаемости каждой локальной однопараметрической группы, порождённой векторным полем $X \in \zeta$, возникает группа изометрий G многообразия M и орбита $K \subset M$ этой группы. А это возможно не всегда.

Результат теоремы 1 позволяет отождествить алгебру Ли ζ всех векторних полей Киллинга, заданных в некоторой окрестности точки $p \in M$, с алгеброй Ли всех векторных полей Килилнга на псевдоримановом аналитическом многообразии M. Пусть $\eta \subset \zeta$ – стационарная подалгебра, $X \in \eta$ тогда и только тогда, когда $X(p) = 0$. Пусть G – односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H \subset G$ – подруппа, порождённая подалгеброй $\eta \subset \zeta$. Экспоненциальное отображение задаёт изометрическое действие группы G в некоторой окрестности U точки p, определённое для всех элементов $g \in W$ из некоторой окрестности 0 в G. Продолжение этих изометрий на всё M опредилило бы орбиту $K = G(p)$ как дифференцируемое подмногообразие многообразия M, диффеоморфное фактор группе G/H. Однако фактор группа G/H является диференцируемым многообразием тогда и только тогда, когда подгруппа H замкнута в G. Для псевдориманова многообразия удаётся найти довольно общее условие на метрику, при выполнении которого подгруппа H замкнута в G. Это неожиданное условие состоит в том, что алгебра ζ имеет нулевой центр.

Теорема 2. Пусть ζ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на псевдоримановом аналитическом многообразии M, $p \in M$ — произвольная фиксированная точка и $\eta \subset \zeta$ — стационарная подалгебра, состоящая из векторных полей $X \in \zeta$ таких, что $X(p) = 0$, G – односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ, $H \in G$ – подгруппа, порожденная подалгеброй $\eta \subset \zeta$. Тогда если ζ имеет нулевой центр, то H замкнута в G.

Доказательство теоремы 2 в общем виде в случае риманова многобразия следует из описания квазиполного многообразия, определение и свойства которого приведены ниже. Здесь же приведём алгебраическое доказательство для псевдориманова многообразия в случае локально однородного многообразия , т.е. при условии $\dim M = \dim\zeta - \dim\eta$.

Предположим, что подгруппа H не замкнута в G, и пусть группа $\overline{H}$ является замыканием H в G, а $\overline{\eta} \subset \zeta$ — алгебра Ли группы $\overline{H} \subset G$. Как доказано в классической работе А.И. Мальцева [4] подалгебра η является нормальным делителем алгебры Ли $\overline{\eta}$. Поэтому присоединённое представление Ad группы G в алгебре ζ, $Adg(X) = g^{-1}Xg$, $\forall X \in \zeta$, $g \in G$, определяет линейное отображение в линейном пространстве $V = \zeta/\eta$, если $g \in \overline{H}$.

Рассмотрим нормальную окрестность $U \subset M$ точки p и замкнутый шар радиуса r (в нормальных координатах) $B_r \subset U$. Ввиду компактности B_r существует такая окрестность единицы $W \subset G$, что все элементы $g \in W$ определяют изометрии $g: B_r \to U$ (g принадлежит локальной однопараметрической группе преобразований, порождённой каким-нибудь векторным полем Киллинга на M). Выберем базис в касательном пространстве T_pM, отождествлённым с линейным пространством $V = \zeta/\eta$, и будем рассматривать преобразования Adh, $h \in H \cap W$ и Adg, $g \in \overline{H}$, как матрицы.

Рассмотрим векторное поле $Z \subset \overline{\eta}$, $Z \notin \eta$, и локальную однопараметрическую подгруппу $H_t \in \overline{H}$, порождённую векторным полем Z. Каждый элемент $h_t \in H_t \cap W$ является пределом последовательности элементов $h_n \in H$, причём, начиная с некоторого номера $h_n \in W$. При $t \le 1$ нормы матриц линейных преоразований Adh_t и $Adh_n = h_n$ линейного пространства V ограничены некоторой константой C. Поэтому отображения Adh_t и Adh_n отображают шар B_δ в шар B_r, $B_\delta \subset B_r \subset V$, $\delta \le \dfrac{r}{C^2 n}$. Ограниченная последовательность матриц Adh_n задаёт последовательность изометрических отображений, определённых на окрестности $B_\delta \subset M$ точки $p \in M$. Тогда отображение Adh_t также задаёт (в нормальных координатах) изометрическое отображение, определённое на B_δ.

Умножение справа на элемент h_t задаёт линейное отображение на касательном пространстве $T_pM = \zeta/\eta$, которое, в свою очередь, задаёт при всех $t \le 1$ изометричекое отображение, определённое на некоторой окрестности точки $p \in M$, так как умножение справа на h_t является суперпозицией изометрических отображений $Adh_t : X \to h_t^{-1}Xh_t$ и $h_t : X \to h_tX$. Таким образом, имеется однопараметрическая группа изометрий $X \to Xh_t$, коммутирует с действием каждого достаточно малого элемента группы G на U. Следовательно, векторное поле Киллинга, соответствующее указанной однопараметрической группе «умножений справа», коммутирует со всей алгеброй Ли ζ. что противоречит условию теоремы.

Кроме незамкнутости вышеупомянутой подруппы H, порождённой стационарной подалгеброй, существует множество других препятствий для продолжения локально заданной изометрии риманова аналитического многообразия. Так локально заданная изометрия полного многообразия M аналитически продолжается в окрестность любой точки этого многообразия (и то, возможно неоднозначно). При удалении из M замкнутого подмножества свойство продолжаемости локальных изометрий утрачивается.

Рассмотрим класс римановых аналитических многообразий локально изометричных друг другу, т.е. имеющих изометричные открытые подмножества. Такой класс многообразий определяется только локальними свойствами метрики. Возникает вопрос, для каких метрик можно найти многобразие M, обладающее свойством аналитической продолжаемости локально заданных изометрий $\varphi: U \to V$ до изометрий $\varphi: M \to M$, и какими свойствами должно обладать это многобразие. Прежде всего такое многобразие должно быть непродолжаемо.

Определение 1. Псевдориманово аналитическое многообразие M называется *непродолжаемым*, если оно не может быть аналитически вложено в качестве открытого подмножества в псевдориманово аналитическое многообразие N, отличное от M.

Как показывает пример нетривиальной накрывающей евклидовой плоскости с выколотой точкой свойство непродолжаемости является далеко не достачным для продолжаемости локально заданных изометрий до изометрий всего многообразия. Определить многообразие, обладающее свойством продолжаемости всех локально заданных изометрий до изометрий всего многообразия, удаётся для метрик, алгебра Ли векторных полей Киллинга которых имеет нулевой центр.

Определение 2. Ориентированное риманово аналитическое многообразие M называется *квазиполным*. Если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга изометрий $\varphi : U \to V$ между своими открытыми подмножествами.

Теорема 3. Любой риманов шар с аналитической метрикой такой, что алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на этом шаре имеет нулевой центр, содержится в квазиполном многообразии.

Идея доказательства теоремы 3 состоит в аналитическом продолжении первоначально заданного риманова многообразия U до непродолжаемого многообразия M_1 с последующей факторизацией по всем локальным изометриям сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга. Более детальное изучение квазиполных многообразий и доказательство теоремы 3 приведено в [3].

Теорема 4. Любая изометрия $\varphi : U \to V$ между открытыми подмножествами квазиполных многообразий M и N аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to N$.

Идея доказательства теоремы 4 состоит в том, что непродолжаемость изометрии φ противоречит непродолжаемости многообразия N.

Из теоремы 4 следует, что квазиполное многообразие, единственно в классе локально изометричных друг другу многообразий. Термин квазиполное многообразие связан с тем, что полное многообразие алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра, является и квазиполным. Доказательство теоремы 4 и другие свойства квазиполных многообразий приведены в [3].

Замечание. Теорема 2 в случае собственно риманова многообразия является следствием теоремы 4.

Данную работу можно рассматривать как продолжение работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*. Мир. Москва. — 1964.
2. Popov V.A. On analytic extensions of Riemannian manifolds. *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*. Kharkov: “Apostrof”. — 2011. – P.323–326.
3. Попов В.А. Продолжаемость локальных групп изометрий. *Матем. сб*. – 1988. – т.135 (177), N1. – С.45 – 64.
4. Мальцев А.И. On the theory of Lie groups in the large. *Матем. сб*. – 1945. – т. 16(38). – С. 163 — 190.