УДК 517.5

# СИСТЕМЫ СУММИРОВАНИЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ И ПРАВИЛЬНАЯ ПЕРЕСЧИТЫВАЕМОСТЬ

***[1]Олевская Ю.Б., [2]Олевский В.И.***

[1]ГВУЗ Национальный горный университет, Днепропетровск, Украина
[2]ГВУЗ Украинский государственный химико-технологический университет, Днепропетровск, Украина

Для кратных рядов Фурье характер сходимости частичных сумм существенно зависит от вида целочисленного множества, которому принадлежат порядковые номера включенных в них коэффициентов. Вопрос об общей форме таких множеств изучает теория u-сходимости (u(K)-сходимости) кратных рядов Фурье. Альтернативный метод суммирования основывается на понятии так называемых правильно пересчитываемых множеств. В данной работе представлены некоторые результаты, описывающие соотношение u-сходимости и сходимости по системе правильно пересчитываемых множеств. Показано, что система U(K)-множеств, содержащая шар увеличивающегося до бесконечности радиуса, при фиксированном K является правильно пересчитываемой. Устанавливается, что для функции, удовлетворяющей условию Липшица и имеющей определенный рост p-k-вариации, коэффициенты кратных рядов Фурье также в среднем убывают быстрее на системе U(K) - множеств, чем это диктуется их обычными оценками. Показано, что точная оценка коэффициентов Фурье функции многих переменных достигается на очень "бедном" множестве элементов целочисленной решетки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: кратные ряды Фурье, частичные суммы, сходимость, пересчитываемость.

## СИСТЕМИ ПІДСУМОВУВАННЯ КРАТНИХ РЯДІВ ФУР'Є І ПРАВИЛЬНА ПЕРЕРАХОВУВАНІСТЬ

***Олевська Ю.Б., Олевський В.І.***

Для кратних рядів Фур'є характер збіжності часткових сум істотно залежить від виду цілочислової множини, до якої належать порядкові номери включених до них коефіцієнтів. Питання про загальну форму таких множин вивчає теорія u-збіжності (u(K) - збіжность) кратних рядів Фур'є. Альтернативний метод підсумовування ґрунтується на понятті так званих правильно перераховуваних множин. У даній роботі представлені деякі результати, що описують співвідношення u-збіжності та збіжність по системі правильно перераховуваних множин. Показано, що система U (K) - множин, яка містить кулю зростаючого до нескінченності радіуса, при фіксованому K є правильно перераховувана. Встановлено, що для функції, яка задовольняє умові Ліпшиця і має певне зростання p-k-варіації, коефіцієнти кратних рядів Фур'є також в середньому зменшуються швидше на системі U(K) - множин, ніж це диктується їх звичайними оцінками. Показано, що точна оцінка коефіцієнтів Фур'є функції багатьох змінних досягається на дуже "бідній" множині елементів цілочислової решітки.

*КЛЮЧОВІ СЛОВА*: кратні ряди Фур'є, часткові суми, збіжність, перераховуваність.

## SUMMATION OF MULTIPLE FOURIER SERIES AND CORRECT DENUMERABILITY

***Olevskaya Y.B., Olevskij V.I.***

For multiple Fourier series the convergence of partial sums essentially depends on the type of integer sets, to which the sequence numbers of their terms belong. The problem on the general form of such sets is studying in u-convergence theory (u(K) - convergence) for multiple Fourier series. An alternative method of summation is based on the concept of the so-called correctly denumarable sets. In the paper some results describing the u-convergence relations and convergence on the system or correctly denumarable sets are presented. It is shown that the system of U(K)-sets containing a sphere of infinitly increasing radius for fixed K is correctly denumarable. It is established that for the functions satisfying the Lipschitz condition and having a certain growthing p-k-variation, the coefficients of multiple Fourier series decrease at the average on the system of U(K)-sets faster than it is predicted by their ordinary estimations. It is shown the accurate estimation of the Fourier coefficients of functions of several variables is achieved at a very "poor" set of elements of the integer lattice.

*KEY WORDS*: multiple Fourier series, partial sums, convergence, denumerability.

---

**1. Введение.** Для кратных рядов Фурье характер сходимости частичных сумм существенно зависит от вида целочисленного множества, которому принадлежат порядковые номера включенных в них коэффициентов. В зависимости от этого различают сходимость по сферам, по прямоугольникам (по Прингсхейму), по треугольникам, по гиперболическим крестам и другие [1]. Сходимость по треугольникам рассмотрена, например, в работах А.И. Кузнецовой [2, 3] и А.Н. Бахвалова [4–7]. Сходимость кратных рядов Фурье по выпуклым множествам была рассмотрена в работах В.М. Темлякова [8]. Вопрос об общей форме таких множеств изучает теория $u$-сходимости кратных рядов Фурье. Двумерный случай $u$-сходимости и $u(K)$-сходимости детально изучены М.И. Дьяченко в [29]. Альтернативный метод суммирования, предложенный в работах Б.Д. Котляра [9], основывается на понятии т.н. правильно пересчитываемых множеств. В данной работе представлены некоторые результаты, описывающие соотношение $u(K)$-сходимости и сходимости по системе правильно пересчитываемых множеств.

**2. Основные определения и постановка задачи.** Рассмотрим класс периодических функций $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с параллелепипедом периодов $\overline{Q}^m$:

$$f\left(y_1,...,y_m\right) \subset \widetilde{L}^2\left(\overline{Q}^m\right)$$

$$: f\left(y_1+2\pi l_1,...,y_m+2\pi l_m\right) = f\left(y_1,...,y_m\right),$$

$$l \equiv \left(l_1,...,l_m\right) \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m,\ \overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$$

Коэффициенты кратного ряда Фурье функции $f$ по тригонометрической системе $\left\{e^{2\pi i(l,t)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m} \equiv \left\{\exp 2\pi i \sum_{j=1}^m l_j t_j\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ обозначим $\left\{c_l\left(f\right)\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$. Из [10] известен порядок убывания к нулю переставленной в порядке невозрастания последовательности модулей $\left\{\left|c_l\left(f\right)\right|\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ коэффициентов Фурье $\left\{c_l^*\left(f\right)\right\}_{l\in\mathbb{Z}^m}$ функции $f$ и условия сходимости кратных рядов вида

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^m}\left|c_{l_j}\left(f\right)\right|^{\beta} = \sum_{\substack{l_j\in\mathbb{N},\\ j=1,...,m}}\left|c_{l_1...l_m}\left(f\right)\right|^{\beta} \qquad (1)$$

для функций, принадлежащих различным классам. Эти результаты существенно улучшают традиционные данные, полученные непосредственной оценкой коэффициентов Фурье.

Пусть $\widetilde{\Lambda}_{\alpha,p}$ означает класс функций $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, заданных и периодических на $\mathbb{R}^m$ с кубом периодов $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\le 1$, и имеющих ограниченную $p$-варіацію; $\widetilde{\Lambda}_{\alpha}$ означает класс функций $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, заданных и периодических на $\mathbb{R}^m$ з кубом періодів $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\le 1$.

**Определение 1.** Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \left\{B_j\right\}_1^\infty$ – система таких конечных подмножеств $\Lambda$, что $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = \Lambda$, $B_1 \subset B_2 \subset ...$, $\left|B_j\right|$ – число элементов в $B_j$. Асимптотической плотностью множества $\mathfrak{N} \subset \Lambda$ по системе $\mathfrak{B}$ называется предел (если он существует)

$$\operatorname{mes}\mathfrak{N} = \left(\mathfrak{B}\right)\operatorname{mes}\mathfrak{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left|B_N\right|}\sum_{\mathfrak{N}\cap B_N} 1.$$

**Определение 2.** Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \left\{B_j\right\}_1^\infty$ – система таких конечных подмножеств $\Lambda$, что $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = \Lambda$, $B_1 \subset B_2 \subset ...$, $\left|B_j\right|$ – число элементов в $B_j$. Пусть система множеств $\mathfrak{B} = \left\{B_j\right\}_1^\infty$ удовлетворяет следующему требованию: все точки $l = \left(l_1,...,l_m\right) \in \Lambda$ можно занумеровать натуральными числами $\varphi(l)$ так, чтобы номер точки был не меньше максимума модуля любой ее координаты, причем вначале нумеруются элементы множества $B_1$, затем – элементы множества $B_2 \setminus B_1$ и т.д. Тогда элементы $B_j \setminus B_{j-1}$ имеют номера меньше, чем элементы множества $B_{j+1} \setminus B_j$. Систему $\mathfrak{B}$, для которой точки $\Lambda$ могут быть перенумерованы таким образом, назовем правильно пересчитываемой.

Правильная пересчитываемость означает существование такой функции $\varphi: l \in \Lambda \to \varphi(l) \in \mathbb{N}$, осуществляющей взаимно-однозначное отображение $\Lambda$ на $\mathbb{N}$, что $\varphi(l) \ge \max_{1\le j\le m}\left|l_j\right|$ и, если $l^{(j)} \in B_j \setminus B_{j-1}$, $\left(B_0 \equiv \varnothing\right)$, то $\varphi\left(l^{(j+1)}\right) > \varphi\left(l^{(j)}\right)$. В [9] при рассмотрении различных систем $\mathfrak{B}$ показано, что такому ограничению удовлетворяют все естественные системы (параллелотопы с ограниченным отношением длин ребер, гомотеты фиксированного множества и т.п.).

В то же время в [1] дано определение $u$-сходимости и $u(K)$-сходимости для двумерного случая и сказано, что они могут быть легко распространены на многомерный случай. Сделаем это.

**Определение 3.** Ограниченное множество $u \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ будем считать принадлежащим множеству $\mathrm{U}$, если $\prod_{j=1}^{m}\left[-\left|l_j\right|,\left|l_j\right|\right]\cap\mathbb{Z}^m\subseteq u$ для любого $l\equiv\left(l_1,\ldots,l_m\right)\in u$.

**Определение 4.** Пусть задано число $\mathrm{K}>1$. Ограниченное множество $u\in\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$ будем считать принадлежащим множеству $\mathrm{U}(\mathrm{K})$, если $u\in\mathrm{U}$ и для любой системы векторов $\left\{\left(\mathrm{L}_1,0,\ldots,0\right),\left(0,\mathrm{L}_2,\ldots,0\right),\ldots,\left(0,0,\ldots,\mathrm{L}_m\right)\right\}\subseteq u$ целочисленные многогранники

$$\left\{l=\left(l_1,l_1,\ldots,l_m\right)\in\mathbb{Z}^m:\mathrm{K}\left|l_j\right|+\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{m}\left|l_i\right|\leq\mathrm{L}_j\right\}_{j=1}^{m}\subseteq u.$$

**Определение 5.** Будем говорить, что ряд (1) $u$-сходится ($u(K)$-сходится) к числу $\alpha$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N$, что для каждого множества $u\in U\ \left(u\in U\left(K\right)\right)$, содержащего шар $\left\{\left(l_1,\ldots,l_m\right)\in\mathbb{Z}^m:\left|\left(l_1,\ldots,l_m\right)\right|\leq N\right\}$

$$\left|\sum_{l\in u}\left|c_{l_1\ldots l_m}\left(f\right)\right|^{\beta}-\alpha\right|<\varepsilon$$

В [1] М.И. Дьяченко отмечает следующее: «Разные частичные суммы рядов Фурье вообще ведут себя совершенно непохожим образом (например кубические и сферические частичные суммы), особенно сильно их свойства меняются тогда, когда мы разрешаем множествам, по которым берутся суммы, вытягиваться вдоль координатных осей. Классическим примером здесь является ситуация с кубическими и прямоугольными суммами кратных рядов Фурье непрерывных функций, первые из которых сходятся почти всюду, а вторые могут расходиться в каждой точке. … В связи с этим представляется интересным выявить закономерности поведения частичных сумм, взятых по множествам, которым запрещено "расползаться" вдоль осей координат. На наш взгляд, $u(K)$-сходимость является одним из наиболее широких обобщений такого рода способов задания сходимости, хотя, разумеется, возможно, это определение не является оптимальным для описания поведения кратных рядов Фурье.»

Таким образом, $u(K)$-сходимость и правильная пересчитываемость представляют собой два различных, но достаточно общих подхода к суммированию кратных рядов. Поскольку с их помощью описываются различные свойства рядов, то установление связи между этими подходами позволяет расширить описание изучаемого объекта.

Определение 5 обладает некоторой неопределенностью в смысле определения последовательного набора точек целочисленной решетки, включаемых в частичные суммы. Переформулируем его следующим образом.

**Определение 6.** Будем говорить, что ряд (1) $u$-сходится ($u(K)$-сходится) к числу $\alpha$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N$, начиная с которого для каждого $M\geq N$ и для каждого множества $u\in U$ ($u\in U\left(K\right)$ для некоторого фиксированного конечного значения $K$), содержащего шар $\left\{\left(l_1,\ldots,l_m\right)\in\mathbb{Z}^m:\left|\left(l_1,\ldots,l_m\right)\right|\leq M\right\}$

$$\left|\sum_{l\in u}\left|c_{l_1\ldots l_m}\left(f\right)\right|^{\beta}-\alpha\right|<\varepsilon$$

Поскольку $u(K)$-сходимость не описывает суммирование по прямоугольникам (по Прингсхейму), составляющим в то же время правильно пересчитываемую систему множеств, то понятно, что правильная пересчитываемость не является частным случаем $u(K)$-сходимости. Покажем, что используемая в определении 6 система $\mathrm{U}(\mathrm{K})$- множеств является правильно пересчитываемой и рассмотрим вытекающие из этого факта свойства коэффициентов кратных рядов.

### 3. Определение соотношения между системами суммирования.

**Теорема 1**. *Пусть* $\Lambda=\mathbb{Z}^m\subset\mathbb{R}^m$ – *целочисленная решетка в* $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B}=\left\{\mathrm{B}_j\right\}_1^{\infty}$ – *система конечных подмножеств* $\Lambda$ *при некотором фиксированном конечном значении* $\mathrm{K}$, *такая, что для любого значения* $j$ $\mathrm{B}_j\in\mathrm{U}(\mathrm{K})$ *и содержит шар* $\left\{\left(l_1,\ldots,l_m\right)\in\mathbb{Z}^m:\left|\left(l_1,\ldots,l_m\right)\right|\leq j\right\}$. *Тогда* $\mathfrak{B}$ *является системой правильно пересчитываемых множеств.*

***Доказательство***. Поскольку система $\mathrm{U}(\mathrm{K})$ является достаточно определенной – это совокупность вложенных друг в друга многомерных «звездоподобных» многогранников с сужающимися к концу шипами (сужение определено принадлежностью к множеству $\mathrm{U}$), то доказательство можно построить конструктивно, путем конкретного пересчета элементов.

Рассмотрим часть многомерного пространства, имеющего положительные значения всех координат. Нумерацию начнем в положительном направлении по оси, содержащей наиболее удаленную точку начиная с начала координат. В этой части $\varphi(l)=\max_{1\leq j\leq m}\left|l_j\right|+1$. По достижению наиболее удаленной точки, переходим к первой от начала координат точке на оси, содержащей следующую по удаленности точку, и снова продолжаем нумерацию вдоль первой оси. Перебрав все линии в этой плоскости, сдвигаем ее на единицу по следующей по длине оси и возобновляем нумерацию. Процедуру повторяем до пересчета всех точек множества.

Для остальных $2^m-1$ областей пересчет производится аналогично, но с учетом направления роста модулей координат по осям. Поскольку области являются симметричными, а нумерация начинается с запаздыванием на число точек в первой подобласти, то условие $\varphi(1) \geq \max_{1\leq j\leq m}|l_j|$ выполняется автоматически.

Полнота системы $\mathfrak{B}$ в $\Lambda$, определяемая равенством

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \Lambda ,$$

вытекает из вложенности в $B_j$ шара, радиус которого стремится к бесконечности. Последовательная вложенность множеств $B_j$

$$B_1 \subset B_2 \subset ...$$

вытекает из их построения.

Поскольку для многомерных областей количество точек в первом множестве $B_1$ всегда будет больше максимального значения их координат (даже при вырождении в одномерный случай их число будет больше на точку начала координат), то нумерация $B_2$ заведомо начинается с номера, превышающего минимальные значения координат включенных в него точек. Пересчет $B_2$ и последующих множеств надо начинать, таким образом, с точки с минимальными значениями координат и двигаться последовательно по мере их возрастания. Такой алгоритм обеспечивает превышение номера точки над значениями ее координат. Понятно также, что при такой системе пересчета все номера точек из множеств с большим индексом будут больше номеров точек из множеств с меньшим индексом.

Таким образом, используемая в определении 6 система множеств является правильно пересчитываемой.

Теорема доказана.

Хорошо известна связь между гладкостью ядра интегрального оператора Фредгольма и порядком стремления к нулю собственных и сингулярных чисел этого оператора [9]. Распространению этих результатов на функции многих переменных посвящена робота [11]. В ней установлена оценка сверху для сингулярных чисел оператора, основанная на свойствах ядра, – ограниченности его вариации и поведении модуля непрерывности. В этой работе введено и использовано понятие $p-k$-вариации функции многих переменных (для одномерного случая эквивалентные определения даны в [9]). Стандартным приемом из результатов про порядок убывания сингулярных чисел получаются [11] результаты о порядке убывания коэффициентов Фурье функции многих переменных, если функция имеет заданный модуль непрерывности и заданное поведение $p-k$-вариации. В [10] показано, что точная оценка коэффициентов Фурье функции многих переменных достигается на очень "бедном" множестве элементов целочисленной решетки $\Lambda = \mathbb{Z}^m$. В работе [11] устанавливается, что для функции, удовлетворяющей условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, и имеющей определенный рост $p-k$-вариации, коэффициенты Фурье также в среднем убывают быстрее, чем это диктуется их обычными оценками.

Таким образом, с учетом результатов [11] могут быть сформулированы и доказаны следующие теоремы и следствия из них.

**Теорема 2**. *Пусть* $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – *целочисленная решетка в* $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{B_j\}_1^{\infty}$ – *система конечных подмножеств* $\Lambda$ *при некотором фиксированном конечном значении* $K$, *такая, что для любого значения* $j$ *множество* $B_j \in U(K)$ *и содержит шар* $\left\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : |(l_1,...,l_m)| \leq j\right\}$. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *задана и периодична на* $\mathbb{R}^m$ *с кубом периодов* $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, *удовлетворяет условию* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, *и имеет ограниченную* $p$-*вариацию* $\left(f \in \widetilde{\Lambda}_{\alpha,p}\right)$, $q>0$, $0<\beta<1+\alpha(2-q)/2m$, $C>0$ *и множество точек целочисленной решетки* $\mathfrak{M}$ *определяется следующим образом:*

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(f;C,\beta) = \left\{ l \in \Lambda \,\middle|\, |c_l| \geq C\left(\max_{1\leq j\leq m}|l_j|\right)^{-\beta} \right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\mathfrak{M}\cap B_N} 1 = O\left( |B_N|^{\varepsilon+\beta\left(1+\alpha(2-q)/2m\right)^{-1}} \right).$$

**Следствие 1.** *Пусть* $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – *целочисленная решетка в* $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{B_j\}_1^{\infty}$ – *система конечных подмножеств* $\Lambda$ *при некотором фиксированном конечном значении* $K$, *такая, что для любого значения* $j$ *множество* $B_j \in U(K)$ *и содержит шар* $\left\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : |(l_1,...,l_m)| \leq j\right\}$. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *задана и периодична на* $\mathbb{R}^m$ *с кубом периодов* $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, *удовлетворяет условию* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, *и имеет ограниченную* $p$-*вариацию* $\left(f \in \widetilde{\Lambda}_{\alpha,p}\right)$, $q>0$, $0<\beta<1+\alpha(2-q)/2m$, $C>0$ *и множество точек целочисленной решетки* $\mathfrak{M}$ *определяется следующим образом:*

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(f;C,\beta) = \left\{ l \in \Lambda \,\middle|\, |c_l| \geq C\left(\max_{1\leq j\leq m}|l_j|\right)^{-\beta} \right\}.$$

Тогда

$$(\mathfrak{B})\operatorname{mes}\mathfrak{M} = 0.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – *целочисленная решетка в* $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{B_j\}_1^\infty$ – *система конечных подмножеств* $\Lambda$ *при некотором фиксированном конечном значении* $K$, *такая, что для любого значения* $j$ *множество* $B_j \in U(K)$ *и содержит шар* $\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : |(l_1,...,l_m)| \le j\}$. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *задана и периодична на* $\mathbb{R}^m$ *с кубом периодов* $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, *удовлетворяет условию* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ $(f \in \widetilde{\Lambda}_\alpha)$, $0 < \beta < 0{,}5 + \alpha/2m$, $C > 0$ *и множество точек целочисленной решетки* $\mathfrak{M}$ *определяется следующим образом:*

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(f;C,\beta) = \left\{ l \in \Lambda \left| |c_l| \ge C\left(\max_{1\le j\le m}|l_j|\right)^{-\beta} \right.\right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\mathfrak{M}\cap B_N} 1 = O\left(|B_N|^{\varepsilon+\beta(0,5+\alpha/2m)^{-1}}\right)$$

**Следствие 1.** *Пусть* $\Lambda = \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – *целочисленная решетка в* $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{B_j\}_1^\infty$ – *система конечных подмножеств* $\Lambda$ *при некотором фиксированном конечном значении* $K$, *такая, что для любого значения* $j$ $B_j \in U(K)$ *и содержит шар* $\{(l_1,...,l_m) \in \mathbb{Z}^m : |(l_1,...,l_m)| \le j\}$. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *задана и периодична на* $\mathbb{R}^m$ *с кубом периодов* $\overline{Q}^m = \prod_{j=1}^m [-\pi,\pi]$, *удовлетворяет условию* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ $(f \in \widetilde{\Lambda}_\alpha)$, $0 < \beta < 0{,}5 + \alpha/2m$, $C > 0$ *и множество точек целочисленной решетки* $\mathfrak{M}$ *определяется следующим образом:*

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(f;C,\beta) = \left\{ l \in \Lambda \left| |c_l| \ge C\left(\max_{1\le j\le m}|l_j|\right)^{-\beta} \right.\right\}.$$

Тогда

$$(\mathfrak{B})\operatorname{mes}\mathfrak{M} = 0.$$

Доказательство теорем 2–3 и следствий из них производится прямым применением теоремы 1 к результатам [11].

**4. Выводы.** Показано, что система $U(K)$– множеств, содержащая шар увеличивающегося до бесконечности радиуса, при фиксированном $K$ является правильно пересчитываемой. Устанавливается, что для функции, удовлетворяющей условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, и имеющей определенный рост $p-k$-вариации, коэффициенты кратных рядов Фурье также в среднем убывают быстрее на системе $U(K)$-множеств, чем это диктуется их обычными оценками. Показано, что точная оценка коэффициентов Фурье функции многих переменных достигается на очень "бедном" множестве элементов целочисленной решетки.

ЛИТЕРАТУРА


1. Дьяченко М.И. Двумерные классы Ватермана и $u$-сходимость рядов Фурье. *Матем. сборник*. – 1999. – т. 190(7). – С. 23–40.
2. Кузнецова О.И. О некоторых свойствах полиномиальных операторов треугольного вида в пространстве непрерывных периодических функций двух переменных. *Докл. АН СССР*. 1975. – т. 223, N 6. – С. 1304–1306.
3. Кузнецова О.И. О средних арифметических треугольных и прямоугольных частных сумм двойного ряда Фурье. *Метрические вопросы теории функций и отображений*. Киев: Наукова думка. – 1977. – С. 104–111.
4. Бахвалов А.Н. Классы Ватермана и треугольные частичные суммы двойных рядов Фурье. *Analysis Math*. – 2001. – v. 27. – N 1. – P. 3–36.
5. Бахвалов А.Н. О локальном поведении многомерной $\Lambda$-вариации. *Матем. сборник*. – 2010. – т. 201(11). – С. 3–18.
6. Бахвалов А.Н. О сходимости и локализации кратных рядов Фурье для классов функций ограниченной $\Lambda$-вариации. *Вестник МГУ. Сер.1. Мат., мех*. – 2008, N 3. – С. 6–12.
7. Бахвалов А.Н. Представление непериодических функций ограниченной $\Lambda$-вариации интегралом Фурье в многомерном случае. *Изв. РАН. Сер. матем*. – 2003. – т. 67(6). – С. 3–22.
8. Темляков В.Н. Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения *Матем. сб.* – 1987. – т. 134(176), N1(9). – С. 93–107.
9. Котляр Б.Д. *Коэффициенты Фурье гладких функций и плотности упаковок* : автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук по спец. 01.01.01 - ГНИПКТИ МТЧМ. Харьков. – 1994. – 24 с.
10. Олевская Ю.Б. О скорости убывания коэффициентов Фурье функций многих переменных *Диференціальні рівняння та їх застосування.* Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетровського ун-та. – 1999. – С. 54–60.
11. Олевська Ю.Б. Сингулярні числа інтегральних операторів та багатовимірні варіації *Доповіді Національної академії наук України*. – 1999. – N12. – С. 17–21.