

УДК 517.53

## ОБ АЛГОРИТМАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗЛИЧНЫХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

*Недошивина А.И.*

*Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия*

В статье рассматриваются алгоритмы локализации точки относительно многоугольников и некоторых криволинейных областей на плоскости. Приводится краткий обзор известных методов локализации. Предлагается оригинальный метод, основанный на применении теоремы и формулы Коши для функций комплексного переменного. В результате ответ на поставленный вопрос сводится к вычислению некоторой величины, в зависимости от которой можно сделать выводы, находится ли данная точка внутри контура, вне его или на границе. Сформулированы некоторые преимущества предложенного метода перед известными методами. Описаны возможные применения результатов к сжатию компьютерных данных, получаемых в результате видеонаблюдений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** методы локализации, алгоритмы, видеонаблюдения, сжатие данных.

## ПРО АЛГОРИТМИ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ТОЧКИ ВІДНОСНО РІЗНИХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

*Недошивіна А.І.*

В статті розглядаються алгоритми локалізації точки відносно багатокутників і деяких криволінійних областей на площині. Наводиться короткий огляд відомих методів локалізації. Пропонується оригінальний метод, який базується на застосуванні теореми і формули Коші для функцій комплексного змінного. В результаті відповідь на поставлене питання зводиться до обчислення деякої величини, залежно від якої можна зробити висновки, чи знаходиться дана точка всередині контуру, поза його або на границі. Сформульовано деякі переваги запропонованого методу перед відомими методами. Описані можливі застосування результатів до стиснення комп'ютерних даних, які одержувані в результаті відеоспостережень.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** методи локалізації, алгоритми, відеоспостереження, стиснення даних.

## ON ALGORITHMS FOR LOCALIZATION OF A POINT RELATIVELY VARIOUS FLAT AREAS

*Nedoshivina A.I.*

The article deals with algorithms for localization of a point relatively some polygons and curvilinear regions in the plane. An overview of known methods of localization is given. An original method based on the use of the Cauchy's theorem and formula for functions of a complex variable is proposed. As a result, the developed approach is reduced to the calculation of a certain value, depending on which one can conclude whether a given point is localized inside, outside or at the boundary of the area. The advantages of the proposed method over known methods are formulated. Possible applications of the results to compression of the computer video observation data are described.

**KEY WORDS:** localization methods, algorithms, video observation, data compression.

**1. Введение.** В настоящее время вычислительная геометрия представляет собой хотя и достаточно молодую дисциплину, но, тем не менее, быстро развивающуюся и нашедшую широкое применение в таких областях как распознавание образов, компьютерная графика, робототехника и другие [1–3].

Одним из направлений вычислительной геометрии является геометрический поиск, в котором принято выделять две основные проблемы: задачи локализации и задачи регионального поиска. Рассмотрим задачи первого типа.

Один из типичных примеров приложения задачи локализации точки – это задача определения местоположения. В качестве исходных данных может выступать, например, дорожная карта, а в качестве запроса – пара координат от глобальной системы навигации и определения местоположения (GPS). Ответом может быть номер дороги, на которой находится автомобиль.

**2. Анализ известных методов.** Перечислим некоторые из известных алгоритмов локализации точки (см. [1–3]):

1) Метод луча;

- 2) Метод суммирования углов;
- 3) Локализация точки для выпуклого и звездного многоугольника;
- 4) Метод полос;
- 5) Метод цепей;
- 6) Метод детализации триангуляции;
- 7) Метод трапеций.

**Задача локализации точки.** Одной из главных моделей геометрического поиска является задача локализации точки, когда файл представляет собой разбиение геометрического пространства на области, а запрос является точкой. Локализация состоит в определении области, содержащей запрошенную точку.

Трудоемкость этой задачи существенно зависит от природы пространства и от способа его разбиения.

**Метод трассировки луча. Учёт числа пересечений.** Один из стандартных методов определения принадлежности точки произвольному простому многоугольнику заключается в следующем. Выпустим луч из данной точки в произвольном направлении (например, в положительном направлении горизонтальной оси), и посчитаем: сколько раз луч пересекает рёбра многоугольника. Если число пересечений нечётно, то объявляется, что точка лежит внутри многоугольника, если чётно — то снаружи. Это основано на том простом наблюдении, что при движении по лучу с каждым пересечением границы точка попеременно оказывается то внутри, то снаружи многоугольника (рис. 1)

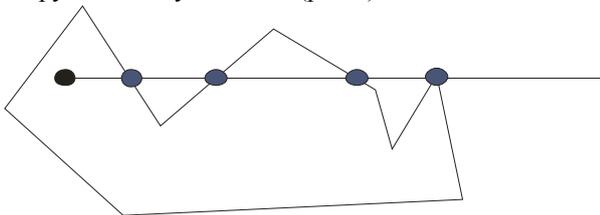


Рис. 1. Схема к методу трассировки луча.

В алгоритме возникает затруднение в вырожденном случае, когда луч пересекает вершину многоугольника. Один из приёмов для его преодоления заключается в том, чтобы считать, что такие вершины многоугольника лежат на бесконечно малую величину выше (или ниже) прямой луча, и, стало быть, пересечения на самом деле и нет. Таким образом, пересечение луча с ребром засчитывается, если один из концов ребра лежит строго ниже луча, а другой конец — выше или лежит на луче.

С другой стороны можно просто учесть частные случаи, когда точка проходит через точку стыка двух сторон или луч покрывает некоторый отрезок стороны. В этих случаях мы учтем одну точку пересечения дважды. Всего возможно 6 частных случаев (рис 2).

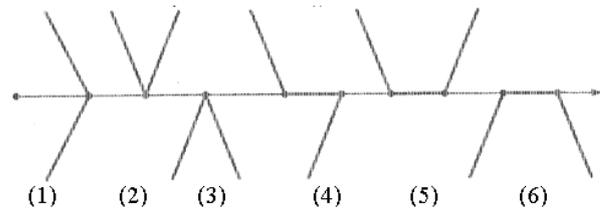


Рис. 2. Варианты расположения лучей.

Чтобы учесть случаи (1), (2), (3), нужно проверить, что точка пересечения не является верхним концом отрезка, а, чтобы учесть случаи (4), (5), (6), достаточно отбрасывать горизонтальные отрезки.

Алгоритм работает за время  $O(N)$  для  $N$ -угольника.

**Учёт числа оборотов.** Рассмотрим число оборотов, которое делает ориентированная граница многоугольника вокруг данной точки. Оно может быть вычислено следующим образом. Как и раньше, выпустим луч из этой точки в произвольном направлении и рассмотрим рёбра, которые он пересекает. Каждому пересечению присвоим число +1 или -1 в зависимости от того, как ребро пересекает луч — по часовой (слева направо) или против часовой стрелки (справа налево). Эти два случая можно различить по знаку скалярного произведения между направляющим вектором ребра и нормалью к направляющему вектору луча. Сумма будет положительной или отрицательной, в зависимости от ориентации границы. Если она не равна нулю, то будем считать, что точка лежит внутри многоугольника, иначе — снаружи.

Для простых многоугольников этот метод работает так же, как и метод, основанный на подсчёте числа пересечений. Разница между ними проявляется при рассмотрении многоугольников с самопересекающейся границей.

**Метод (суммирования) углов.** Можно определить, что данная точка ( $P$ ) находится внутри многоугольника с вершинами  $V_0, V_1, \dots, V_n = V_0$ , вычислив сумму:  $\sum_{i=1}^n \phi_i$ , где  $\phi_i$  — угол (в радианах и со знаком) между лучами  $PV_{i-1}$  и  $PV_i$ , т.е.:  $\phi = \arccos\left(\frac{PV_{i-1} * PV_i}{|PV_{i-1}| * |PV_i|}\right)$ .

Можно доказать, что эта сумма есть не что иное, как *winding number* (число намоток или винтовое число) точки  $P$  относительно границы многоугольника, с точностью до константного множителя  $2\pi$ . Поэтому можно считать, что точка лежит снаружи многоугольника, если сумма равна нулю (или достаточно близка к нему, если используется приближённая арифметика). Однако данный метод весьма непрактичен, так как требует вычисления дорогостоящих операций для каждого ребра (обратных тригонометрических функций, квадратных корней, деления), и был даже назван «худшим в мире алгоритмом» для данной задачи.

**Локализация точки относительно выпуклого и звездного многоугольников.** Принадлежность точки выпуклому или звездному  $N$ -угольнику может быть определена при помощи двоичного поиска за время  $O(\log N)$  при затрате  $O(N)$  памяти и  $O(N)$  времени на предварительную обработку.

Метод для выпуклого многоугольника. В данном случае мы можем построить алгоритм намного более быстрый, чем линейный.

Возьмем любую точку  $q$  внутри многоугольника (например, геометрический центр масс), проведем из нее все отрезки до остальных вершин многоугольника. В силу выпуклости многоугольник разобьется на непересекающиеся клинья (Рис. 3)

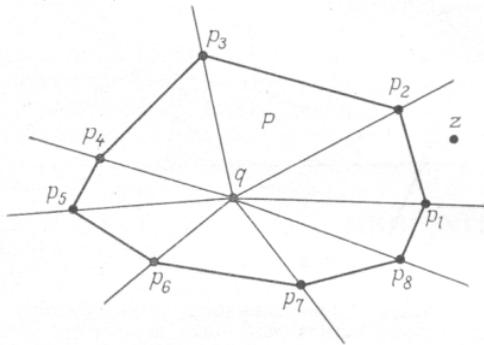


Рис.3. Разбиение многоугольника на клинья.

Теперь заметим, что возможно упорядочить данные клинья по полярному углу против часовой стрелки и применить бинарный поиск для поиска нужного клина. После того, как клин найден, осталось только проверить, лежит ли точка внутри клина или снаружи.

Как проверить, лежит ли данная точка  $z$  внутри клина  $p_i q p_{i+1}$ ? Точка  $z$  лежит внутри клина  $p_i q p_{i+1}$ , тогда и только тогда, когда поворот  $p_i q p_{i+1}$  правый, если поворот левый, то точка снаружи.

Какое же свойство выпуклого многоугольника позволяет провести быстрый поиск? Чтобы можно было применить двоичный поиск, вершины должны быть упорядочены по углу относительно некоторой точки. Очевидно, что выпуклость является только достаточным условием обладания этим свойством. На самом деле существует более обширный класс простых, многоугольников, включающий в себя и выпуклые многоугольники, который обладает этим свойством: это класс *звездных* многоугольников. Действительно, звездный многоугольник  $P$  (рис.4) содержит по меньшей мере одну точку  $q$  такую, что отрезок  $q p_i$  лежит целиком внутри многоугольника  $P$  для любой вершины  $p_i$  из  $P$ ,  $i=1, \dots, N$ .

**Методы локализации точки на планарном подразбиении.** Плоский прямолинейный граф  $G$  – это двойка объектов  $(V, E)$ , где  $V$  – множество точек на плоскости (вершин графа), а  $E$  – множество непересекающихся отрезков (ребер графа), концами которых являются точки из множества  $V$ .

Любой плоский прямолинейный граф (ППЛГ) определяет подразбиение плоскости (планарное подразбиение). Локализацией точки на планарном

подразбиении – это процесс определения области, содержащей запрошенную точку.

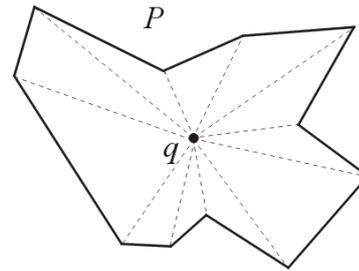


Рис.4. Разбиение звездного многоугольника.

Чтобы вести поиск на планарном подразбиении, на этапе предобработки производится декомпозиция исходных областей на такие области, для которых поисковая операция относительно проста (например, треугольники или трапеции). Тогда успех в локализации точки зависит от возможности быстро сузить множество компонент декомпозиции, которые следует просмотреть. Среди методов, таких как метод полос, метод цепей, метод детализации триангуляции и метод трапеции, с точки зрения затрат времени на предобработку наилучшими являются методы цепей и трапеций. В то время как метод полос обладает наихудшим временем на предобработку из всех представленных. А вот с точки зрения затрат времени на запрос наихудшим является метод цепей. Метод трапеции демонстрирует наилучшие результаты и является эффективным методом, но прямая процедура данных поиска использует неоптимальное количество памяти.

**3. Метод комплексного интегрирования в задаче о локализации точки относительно стандартного многоугольника на плоскости.** Рассмотрим новый предлагаемый метод для решения задачи о локализации точки относительно многоугольника на плоскости. Идея этого метода принадлежит Л.А.Минину и С.М.Ситнику. Основные результаты автора изложены в работах [5–13].

Локализация точки относительно плоской области, например, многоугольника или области с криволинейными границами – это известная задача вычислительной геометрии, имеющая много различных известных способов решения. Наряду с достоинствами, каждое такое решение имеет свои недостатки и ограничения. Новый метод решения этой задачи, предложенный далее, в некоторых отношениях превосходит известные на сегодняшний день алгоритмы. В основе метода лежит неожиданное применение теорем Коши о вычетах из теории функций комплексного переменного. Затем опишем сильные и слабые стороны предложенного алгоритма и рассмотрим приложение к сжатию информации, получаемой в результате видеонаблюдения при помощи соответствующей спецтехники.

Как уже было указано, алгоритм основан на использовании теорем Коши из теории функций комплексного переменного [4]. Вычислим

величину  $K = \int_{\Delta} \frac{dz}{z-W}$ , где  $\Delta$  – это контур данного многоугольника  $M$ ,  $W$  – данная точка плоскости.

Тогда из теоремы и формулы Коши следует, что при  $K=0$  точка  $W \notin M$ , при  $K=2\pi i$  точка  $W \in M$ , а при  $K=\infty$  точка  $\Omega \in \Delta$ .

Вычислим формулы для величины  $K$  при данных координатах вершин многоугольника  $M$  и точки плоскости  $W$ .

Вначале рассмотрим в качестве простого примера случай треугольника  $ABC$  с вершинами  $A=(0,0)$ ,  $B=(0,1)$ ,  $C=(1,0)$  и данной точки с координатами  $W=(x_0, y_0)$ . В этом случае вычисления приводят к следующей формуле для величины  $K$ :

$$K = i * [\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-y_0}{x_0}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0-y_0-1}{x_0+y_0-1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0-y_0+1}{x_0+y_0-1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x_0}{y_0}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x_0}{y_0}\right)].$$

Проанализируем формулу. В результате величина  $K$  оказалась равной с точностью до множителя сумме арктангенсов, аргументы которых представляются в виде дробей. Знаменатели дробей – это уравнения сторон данного треугольника, а числители – это уравнения перпендикуляров к каждой стороне в вершинах треугольника.

Для примера рассмотрим треугольник  $ABC$ , стороны которого заданы прямыми:  $y=1-x$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ . (рис.5) Для этого треугольника вычислим величину  $K$ , равную интегралу от функции комплексного переменного по контуру треугольника  $\Delta$ :

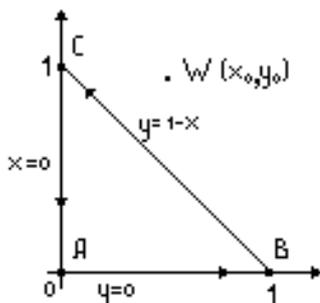


Рис.5. Пример с прямоугольным треугольником.

$$z = x + iy, dz = dx + i dy,$$

$$K = \int_{\Delta} \frac{dz}{z-W} = \int_{AB} \frac{dx}{x-(x_0+iy_0)} + \int_{BC} \frac{dx+id(-x)}{(x+i(1-x))-(x_0+iy_0)} + \int_{CA} \frac{id y}{iy-(x_0+iy_0)}$$

Вычислим интегралы по частям:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{dx+idy}{x+iy-(x_0+iy_0)} &= \int_{AB} \frac{dx}{(x-x_0)+i(y-y_0)} + i \int_{AB} \frac{dy}{(x+x_0)+i(y-y_0)} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x-x_0-iy_0} = \int_0^1 \frac{(x-x_0)+iy_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y_0^2} dx + \int_0^1 \frac{iy_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x_0^2+y_0^2-2x_0+1}{x_0^2+y_0^2} + \\ &+ i \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} + i \operatorname{arctg} \frac{1-x_0}{y_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{BC} \frac{dx+idy}{(x-x_0)+i(y-y_0)} &= \left| \begin{matrix} y = 1-x \\ dy = -dx \end{matrix} \right| = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x-x_0+i(1-x-y_0)} - i \int_0^1 \frac{dx}{x-x_0+i(1-x-y_0)} = \\ &= - \int_0^1 \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(1-x-y_0)^2} dx + i \int_0^1 \frac{(1-x-y_0)}{(x-x_0)^2+(1-x-y_0)^2} dx + \\ &+ i \int_0^1 \frac{(x-x_0)-i(1-x-y_0)}{(x-x_0)^2+(1-x-y_0)^2} dx = \int_0^1 \frac{1-2x-y_0+x_0}{(x-x_0)^2+(1-x-y_0)^2} dx + \\ &+ i \int_0^1 \frac{(1-x-y_0)}{(x-x_0)^2+(1-x-y_0)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x_0^2+y_0^2-2y_0+1}{x_0^2+y_0^2-2x_0+1} + \\ &+ i \cdot \operatorname{arctg} \frac{x_0-y_0-1}{x_0+y_0-1} + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{x_0-y_0+1}{x_0+y_0-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{CA} \frac{dx+idy}{(x-x_0)+i(y-y_0)} &= \int_0^1 \frac{id y}{x_0+i(y-y_0)} = -i \int_0^1 \frac{(-x_0-i(y-y_0))}{x_0^2+(y-y_0)^2} dy = \\ &= i \int_0^1 \frac{x_0}{x_0^2+(y-y_0)^2} dy - \int_0^1 \frac{(y-y_0)}{x_0^2+(y-y_0)^2} dy = \\ &= i \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} + i \operatorname{arctg} \frac{1-y_0}{x_0} - \\ &- \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^2+y_0^2-2y_0+1}. \end{aligned}$$

В результате величина  $K$  равна сумме арктангенсов, аргументы которых представляются в виде дроби. Знаменатель – уравнения сторон треугольника, а числитель – уравнения перпендикуляров к каждой стороне в вершинах треугольника.

Перейдём к рассмотрению общего случая многоугольника. Для этого возьмем одну его сторону и произведем все вычисления для нее.

Пусть отрезок  $AB$  имеет координаты вершин  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ . Тогда прямая, на которой расположен треугольник, задана уравнением:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Для отрезка интеграл от функции комплексного переменного будет равен:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1, dy = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} dx. \\ \int_{AB} \frac{dz}{z-z_0} &= \int_{AB} \frac{dx+idy}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = \\ &= \int_{AB} \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)^2+i(y-y_0)^2} (dx+idy) = \\ &= \int_{AB} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dx - i \int_{AB} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dx + \\ &+ \int_{AB} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dy + i \int_{AB} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dy = \\ &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{(x-x_0)dx}{(x-x_0)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1 - y_0\right)^2} - \\ &- i \int_{x_2}^{x_1} \frac{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1 - y_0\right)dx}{(x-x_0)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1 - y_0\right)^2} + \\ &\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \left( \int_{x_2}^{x_1} \frac{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1 - y_0\right)dx}{(x-x_0)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1 - y_0\right)^2} - \right. \\ &\left. - \int_{x_2}^{x_1} \frac{(x-x_0)dx}{(x-x_0)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1 - y_0\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\begin{aligned} \text{Sum} &= F_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} F_2 - iF_2 + i \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} F_1 = \\ &= i \arctg \left[ \frac{(x_0-x_2)(x_1-x_2) + (y_0-y_2)(y_1-y_2)}{y_0(x_2-x_1) + y_1(x_0-x_2) + y_2(x_1-x_0)} \right] - \\ &- i \arctg \left[ \frac{(x_0-x_1)(x_1-x_2) + (y_0-y_1)(y_1-y_2)}{(y_0-y_1)(x_2-x_1) + x_0(y_1-y_2)} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \ln \left[ (x_1-x_2)^2 \left( (x_0-x_1)^2 (y_0-y_1)^2 \right) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \ln \left[ (x_1-x_2)^2 \left( (x_0-x_2)^2 (y_0-y_2)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для стороны многоугольника интеграл равен сумме арктангенсов и натуральных логарифмов. Если включить сторону в замкнутый контур многоугольника, то логарифмы сократятся и величина  $K$  для многоугольника станет равной сумме арктангенсов, аргументы которых – это дроби, где знаменатели – уравнения сторон, а числители – уравнения перпендикуляров к каждой стороне, восстановленные в вершинах.

Если  $K=0$ , то точка не принадлежит многоугольнику; если  $K=2\pi i$ , то точка принадлежит многоугольнику; а если  $K=\infty$ , то точка находится на контуре многоугольника.

Окончательная формула имеет вид

$$K = \sum \left\{ i \arctg \left[ \frac{(x_0-x_k)(x_k-x_{k+1}) + (y_0-y_{k+1})(y_k-y_{k+1})}{y_0(x_{k+1}-x_k) + y_k(x_0-x_{k+1}) + y_{k+1}(x_k-x_0)} \right] - \right. \\ \left. - i \arctg \left[ \frac{(x_0-x_k)(x_k-x_{k+1}) + (y_0-y_k)(y_k-y_{k+1})}{(y_0-y_k)(x_{k+1}-x_k) + x_0(y_k-y_{k+1})} \right] \right\}$$

где  $(x_0, y_0)$  – точка, принадлежность которой многоугольнику исследуется, а суммирование распространяется на все стороны многоугольника.

Полученная формула не упрощается при помощи выражения для суммы арктангенсов, поскольку сумма арктангенсов определяется с точностью до некоторых координатных углов, нахождение которых потребует информации о расположении данной точки относительно всех прямых, являющихся продолжениями сторон многоугольника. Если расположение точки относительно всех сторон известно, то можно определить и её расположение относительно самого многоугольника. Таким образом, для сворачивания суммы арктангенсов нужно обладать информацией, которая по сути эквивалентна знанию расположения точки относительно многоугольника.

Указанное суммирование арктангенсов можно корректно провести частично в том случае, если известна частичная неполная информация о координатах точки.

Применением полученной выше формулы является метод получения семейства тождеств для сумм арктангенсов. Например, для точки с координатами  $D=(666,13)$ , которая лежит вне треугольника, рассмотренного в примере 1, получим

$$\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{326}{339}\right) + \arctg\left(\frac{109}{113}\right) - \arctg\left(\frac{665}{13}\right) - \arctg\left(\frac{2}{111}\right) = 0.$$

Полученная общая формула для произвольного многоугольника позволяет решать поставленную задачу о локализации точки относительно многоугольника аналитически при помощи вычислений.

**4. Применение метода комплексного интегрирования к задаче о локализации точки относительно криволинейных многоугольных областей на плоскости.** Покажем, что предлагаемый метод работает и для криволинейных границ.

Рассмотрим в качестве частного случая пример, с криволинейной стороной, заданной уравнением:  $y=x^2$ .

Для параболы при  $0 < x < 1$  интеграл от функции комплексного переменного будет равен:

$$\begin{aligned}
\int_{OA} \frac{dz}{z-z_0} &= \int_{OA} \frac{d(x+iy)}{x+iy-(x_0+iy_0)} = \\
&= \int_{OA} \frac{(x-x_0)dx}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - i \int_{OA} \frac{(y-y_0)dx}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\
&+ \int_{OA} \frac{(y-y_0)dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + i \int_{OA} \frac{(x-x_0)dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \\
&= \left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2x dx \end{array} \right| = \\
&= \int_0^1 \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dx - i \int_0^1 \frac{x^2-y_0}{(x-x_0)^2+(x^2-y_0)^2} dx \\
&+ \int_0^1 \frac{2x(x^2-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dx + i \int_0^1 \frac{2x(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(x^2-y_0)^2} dx.
\end{aligned}$$

Для точки  $W(-1;1)$  получим:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x+1}{x^4-x^2+2x+2} dx - i \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4-x^2+2x+2} dx + \\
&+ \int_0^1 \frac{2x(x^2-1)}{x^4-x^2+2x+2} dx + i \int_0^1 \frac{2x(x+1)}{x^4-x^2+2x+2} dx = \\
&\frac{\pi+\log 8}{10} - i \frac{\pi-12\log 2}{20} + \frac{-\pi+\log 4}{10} + i \frac{\pi-\log 4}{10}.
\end{aligned}$$

**5. Выводы.** Предложенный метод позволяет решать поставленную задачу о локализации точки относительно криволинейных многоугольных областей аналитически при помощи вычислений. Автору неизвестен другой подобный аналитический метод решения задачи о локализации. Кроме того, представляется, что к числу достоинств предложенного метода можно отнести три его особенности:

1. Метод работает для криволинейных границ, составленных из кусков сплайнов, кривых Безье и т.д., и при этом вычисления с помощью пакета МАТНЕМАТИСА несколько усложняются, однако без принципиальных затруднений доводятся до явных формул, как только заданы уравнения частей границы. Кроме того, для каждой области вычисление проводится только один раз, далее выполняется простая подстановка в уже полученную формулу;

2. Метод выгодно применять, когда точка лежит вблизи границы области. Конкурирующие методы приводят к необходимости сравнивать практически равные числа, тогда как в данном методе сравнивать приходится существенно различающиеся по модулю величины:  $0, 2\pi, \infty$ .

3. Метод не требует выпуклости многоугольника, в отличие от большинства других известных методов.

**6. Приложения.** Некоторые возможные применения рассматриваемого метода приведены в [5–13]. Остановимся на одном из них. Например, для локализации части экрана, полученного в результате видеонаблюдений, предлагается следующий алгоритм [8–13]:

1. Координаты всех точек экрана подставляются в полученную формулу.
2. Сохраняются только те точки, которые попадают в заданную область локализации.

Изложенная методика может быть использована для оптимизации сохранения данных, получаемых, например, при записи на компьютер результатов слежения видеоаппаратурой или другой аппаратурой, относящейся к специальной технике.

В настоящее время видеонаблюдение активно используется во всех сферах деятельности. Например, на производстве, в торговых и развлекательных центрах, на дорогах и парковках, для охраны частной собственности и прочее. Видеоизображения просматриваются дистанционно и сохраняются в видеоархив или используется только часть видеоматериалов, например для создания доказательной базы фактов правонарушения.

В кадр зачастую попадает ненужная информация. Если это видео с места запрещенной парковки на пешеходном переходе (в зоне остановки), то в кадре нас интересует только участок дороги с пешеходным переходом (с зоной парковки), остальные участки захватываемые объективом ненужные. Если мы хотим зафиксировать запрещенный проезд по тротуару (на запрещающий сигнал светофора) – то будем отслеживать определенную область кадра видеоряда. То же самое происходит при наблюдении, например, за входом в здание. В кадре нам необходимо видеть только вход и ничего более, чтобы объем видеoinформации был минимально возможным.

В этом случае подходяще было бы применить метод комплексного интегрирования.

Для стационарной камеры определим область кадра, которая необходима. Зададим эту область координатами и вычисляем формулу для величины  $K$  при данных координатах вершин криволинейной многоугольной области  $M$ . Точки плоскости в данном случае – это пиксели кадра, подставим в вычисленную формулу с помощью программы.

Программа осуществляет следующий порядок действий:

1. выхватывает каждый кадр видеопотока;
2. для каждого кадра осуществляет попиксельную проверку;
3. координаты каждого пикселя подставляются в вычисленную формулу  $K$ ,
4. сохраняет все точки в новый массив, если величина  $K = 2\pi i$ ,
5. Массив сохраняется как новый кадр видеофайла, который содержит только интересующую нас область.

6. Таким образом, мы сохранили лишь те пиксели, которые находились в интересующей нас области, и значительно сократили объем видеофайла.

**7. Перспективы дальнейшего исследования.** Данный метод может быть развит в различных направлениях. Перечислим некоторые из них.

1. Случай областей с криволинейными границами.
2. Использование формул численного интегрирования с выходом за границы области в случае областей, недоступных для наблюдения.
3. Использование кривых Безье для приложений в компьютерной графике.
4. Использование сплайнов для приближения границ криволинейных областей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Препарата Ф. *Вычислительная геометрия. Введение*. М.: Мир. – 1989.
2. Ласло М. *Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++*. – М.: Бином, 1997
3. Роджерс Д. *Алгоритмические основы машинной графики*. М.: Мир. – 1989
4. Евграфов М.А. *Аналитические функции*. М.: Наука. – 1991.
5. Вышегородцева А.И., Ситник С.М. О математическом алгоритме определения принадлежности точки треугольнику. *Всероссийская научно - практическая конференция "Охрана, безопасность и связь"*. ч.1. – 2005.
6. Вышегородцева А.И., Ситник С.М. О математическом алгоритме определения принадлежности точки области. *Международная научно-практическая конференция "Современные проблемы борьбы с преступностью"*, *Радиотехнические науки*. Вып.1. Воронеж. – 2006. – С.37.
7. Вышегородцева А.И., Ситник С.М. Применение методов теории функций комплексного переменного в одной задаче компьютерной геометрии. *Материалы региональной научно-практической конференции "Информационные технологии в науке, технике и образовании"*. Воронежский институт высоких технологий, Воронеж. – 2008. – С. 5–7.
8. Вышегородцева А.И., Ситник С.М. О применении методов теории функций комплексного переменного к задаче о локализации точки относительно многоугольника, возникающей при сжатии данных видеонаблюдения. *Чернозёмный альманах научных исследований. Сер. "Фундаментальная математика"*. – 2009. – N 1 (8). – С. 324–339.
9. Недошивина А.И., Ситник С.М. Применение методов теории функций комплексного переменного к одной задаче компьютерной геометрии. *Сб. материалов Всероссийской научно-практической конференции "Охрана, безопасность и связь – 2009"*. Воронежский институт МВД России, Воронеж. – 2010. – С. 202–203.
10. Недошивина А.И. Об одном методе сжатия видеоизображений, использующем геометрические алгоритмы. *Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции "Актуальные вопросы эксплуатации систем охраны и защищённых телекоммуникационных систем"*. Воронеж, Воронежский институт МВД. – 2010. – С. 156–157.
11. Недошивина А.И. Об одной задаче компьютерной геометрии, применяемой при сжатии результатов видеонаблюдений. *Международная конференция молодых ученых «Математический анализ и математическое моделирование»*. Владикавказ, Учреждение Российской академии наук Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А. – 2010.
12. Недошивина А.И. О локализации областей при видеонаблюдении. *Международная конференция Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения. Тезисы докладов*. Ростов-на-Дону, Южный Федеральный университет. – 2012. – С.85–86
13. Недошивина А.И. Сжатие видеоинформации с использованием методов теории функций комплексного переменного. *Информационная безопасность в государственных и негосударственных структурах, "Информтех–2012"*. *Сборник материалов*. Юго-Западный государственный университет, Курск. – 2012. – С.45–50.