УДК 517.165

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОБОБЩЕНИЯХ НЕРАВЕНСТВА ВИЛЬЯМА ЯНГА ДЛЯ ДВУХ И ТРЁХ ЧИСЕЛ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ПЕРЕСТАНОВКАМИ

Ковальчук А.А., Ситник С.М.

Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия

В работе рассматриваются неравенства В.Янга для трёх и более чисел, которые обобщают классическое числовое неравенство. Приводятся численные примеры на различные случаи, возникающие при рассматриваемых обобщениях. Идея обобщений основана на рассмотрении множества перестановок несимметричной правой части неравенства. Рассмотрены также различные обобщения и приложения полученных результатов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: неравенства Янга, несимметричные перестановки.

ПРО ЕЛЕМЕНТАРНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕРІВНОСТІ ВІЛЬЯМА ЯНГА ДЛЯ ДВОХ І ТРЬОХ ЧИСЕЛ, ЯКІ ПОРОДЖЕНІ НЕСИМЕТРИЧНИМИ ПЕРЕСТАНОВКАМИ

Ковальчук А.А., Ситник С.М.

В роботі розглядаються нерівності В.Янга для трьох і більше чисел, які узагальнюють класичну числову нерівність. Наводяться чисельні приклади на різні випадки, які виникають при розглянутих узагальненнях. Ідея узагальнень заснована на розгляді безлічі перестановок несиметричної правої частини нерівності. Розглянуто також різні узагальнення і застосування отриманих результатів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нерівності Янга, несиметричні перестановки.

ON SOME ELEMENTARY GENERALIZATIONS OF WILLIAM YANG INEQUATION FOR TWO AND THREE NUMBERS, GENERATED BY ASYMMETRIC PERMUTATIONS

Kovalchuk A.A., Sitnik S.M.

V.Yang's inequalities for three and more numbers generalizing the classical numerical inequality are considered. Some numerical examples for different cases produced by the considered generalizations are given. The idea of generalizations is based on consideration of the set of permutations of asymmetric right-hand side of the inequality. Various generalizations and applications of the obtained results are considered.

KEY WORDS: Young inequality, asymmetric permutations.

1. Введение и исторические сведения. Оценка произведений нескольких величин в терминах суммы некоторых других величин является известной математической задачей. Подобные неравенства играют существенную роль в самой математике и многих её приложениях: математической экономике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных уравнениях, теории сигналов, оценивании сложности прикладных алгоритмов и т.д. [1]. Примером таких оценок является неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. Другим классическим примером является доказанное в 1912 г. английским математиком Вильямом Янгом знаменитое неравенство [2], названное впоследствии его именем. Для двух чисел в простейшем случае неравенство Янга записывается в виде

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1}$$

при условиях $x \ge 0,\ y \ge 0,\quad p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отметим, что в русскоязычной литературе установилось искажённое написание и произношение фамилии Вильяма Янга – Юнг, что, по-видимому, было первоначально вызвано традицией онемечивания иностранных фамилий при русском написании в 1920 – 1940 гг. (см., например, [3–4]). Соотношение (1) геометрически выражает неравенство между площадями криволинейных трапеций, образованных графиками пары взаимно обратных функций. Аналитические доказательства, не использующие геометрических рассуждений, приведены, например, в [3–4, 6]. Как и все классические неравенства, неравенство Янга может быть сформулировано с использованием средних значений. Тогда оно превращается в другое классическое неравенство: весовое среднее геометрическое не превосходит весового среднего арифметического

$$u^a v^b \le au + bv, \qquad a \ge 0, b \ge 0, a + b = 1, u \ge 0, v \ge 0.$$

2. Постановка задачи. Неравенство (1) обладает такой особенностью: его левая часть симметрична по x,y , а правая часть несимметрична. Поэтому можно в правой части (1) поменять местами x,y, тогда получится второе неравенство Янга, на что до работ С.М. Ситника [7–9, 13–14] не обращали внимания:

$$xy \le \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}. \qquad (2)$$

Отсюда возникает задача о сравнении неравенств (1) и (2), то есть об отыскании минимума из правых частей (1) и (2) при всех неотрицательных значениях величин.

Приведём численные примеры, которые показывают, что действительно между правыми частями (1) и (2) может существовать достаточно большой разброс, причём при разных значениях величин более точными (в смысле с меньшей правой частью при равных левых частях) могут быть как неравенство (1), так и неравенство (2).

Пример 1. x=5, y=130, p=4, q=4/3;
$xy = 650$,
$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 650.16502, \qquad \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 71402508$.

В этом случае неравенство (1) лучше (на пять порядков!).

Пример 2. x=0.2, y=0.5, p=4, q=4/3;
$xy = 0.1$,
$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \approx 0.29803, \qquad \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p} \approx 0.10334.$

В этом случае неравенство (2) лучше (примерно в три раза).

Два приведённых примера иллюстрируют два типичных случая.

3. Основные результаты работы. Основной результат содержит полное сравнение неравенств (1) и (2) при всех значениях входящих в них величин при естественных для неравенства Янга ограничениях. Соответствующий результат приводится ниже как теорема 1. Основным оказывается расположение чисел x,y на числовой оси: с одной стороны от единицы или с разных сторон.

Без ограничения общности далее будем предполагать, что выполнены условия

$$y \ge x, \; p \ge 2 \ge q > 1. \qquad (3)$$

Теорема 1 [см. 7–9, 13–14]. *Пусть выполнены условия (3). Тогда*

1. Если $y \ge x \ge 1$, *то оценка (1) лучше, чем (2), то есть выполнены неравенства*

$$xy \le \frac{[\min(x,y)]^p}{p} + \frac{[\max(x,y)]^q}{q} \le \frac{[\max(x,y)]^p}{p} + \frac{[\min(x,y)]^q}{q}. \qquad (4)$$

2. Если $1 \ge y \ge x \ge 0$, *то оценка (2) лучше, чем (1), то есть выполнены неравенства*

$$xy \le \frac{[\max(x,y)]^p}{p} + \frac{[\min(x,y)]^q}{q} \le \frac{[\min(x,y)]^p}{p} + \frac{[\max(x,y)]^q}{q}. \qquad (5)$$

3. Если $y \ge 1 \ge x \ge 0$, *то возможны два варианта. При соотношении*

$$y > y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

точнее неравенство (1). При соотношении

$$1 < y < y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

при данном y существует критическое значение $x = x_{кр}$, $0 < x_{кр} < 1$, *которое является единственным решением трансцендентного уравнения*

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}. \qquad (6)$$

В этом случае при $x \in (0, x_{кр})$ *оценка (2) лучше, чем (1), то есть выполнены неравенства (5), а при* $x \in (x_{кр}, 1)$ *оценка (1) лучше, чем (2), то есть выполнены неравенства (4).*

Доказательство. Из неравенств (1)–(2) лучше то, в котором при данных значениях всех величин меньше правая часть. Поэтому введём в рассмотрение функцию, равную разности этих правых частей

$$f(x,y) = \frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} + \frac{y^q}{q} - \frac{y^p}{p}.$$

Очевидно, что если $f(x,y) < 0$, то неравенство (1) лучше в том смысле, что его правая часть меньше. А при $f(x,y) > 0$ лучше неравенство (2). При $x = y$ или $p = q$ получаем $f(x,y) = 0$, м неравенства совпадают. Поэтому в формулировки теорем включены нестрогие неравенства, а далее в доказательстве мы будем рассматривать строгие.

Отметим очевидные свойства введённой функции:

1. $f(y,y) = 0.$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{p-1} - x^{q-1} = x^{q-1}(x^{p-q} - 1).$

3. При фиксированном y функция $f(x,y)$ от x достигает минимума в единственной точке $x=1$.

4. $f(0,y)=\frac{y^q}{q}-\frac{y^p}{p}$.

А). Рассмотрим первый случай, при котором $1 \le x \le y$. По свойству 2 в этом случае производная по x неотрицательна, следовательно, при фиксированном y по переменной x функция $f(x,y)$ возрастает. Поэтому при $x \le y$ получаем $f(x,y) \le f(y,y)=0$, и неравенство (1) лучше.

Б). Рассмотрим второй случай, при котором $0 \le x \le y \le 1$. По свойству 2 в этом случае производная по x неположительна, следовательно, при фиксированном y по переменной x функция $f(x,y)$ убывает. Поэтому при $x \le y$ получаем $f(x,y) \ge f(y,y)=0$, и неравенство (2) лучше.

В двух рассмотренных случаях числа x,y лежали одновременно оба слева или справа на числовой оси от числа 1. Теперь рассмотрим случаи, когда эти числа разделены единицей.

В1). Рассмотрим третий случай, при котором $x \le 1 \le y$, но при этом $f(0,y)<0$. Это равносильно тому, что

$$y > y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

В этом случае получаем, что $f(x,y)<0$ при $x \in (0,1)$, так как $f(0,y)<0$, $f(y,y)=0$, и функция имеет единственный минимум на рассматриваемом промежутке при $x=1$. Следовательно, в этом случае неравенство (1) лучше.

В2). Рассмотрим четвёртый случай, при котором $x \le 1 \le y$, но при этом $f(0,y)>0$. Это равносильно тому, что

$$1 < y < y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Легко проверить, что при данных условиях получаем в точке минимума отрицательное значение $f(1,y)<0$ так как

$$f(1,y)=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{y^q}{q}+\frac{y^p}{p}=-\left(\frac{p-q}{pq}+\frac{qy^q\left(\frac{p}{q}-y^{p-q}\right)}{pq}\right)<0$$

при значениях $p>q, y<y_0$.

Следовательно, функция $f(x,y)$ при фиксированном y на отрезке $x \in [0,1]$ на левом конце положительна, на правом конце отрицательна и на всём отрезке убывает. Следовательно, функция $f(x,y)$ при фиксированном y на отрезке $x \in [0,1]$ единственный раз обращается в ноль при некотором $x = x_{кр}$, $x_{кр} \in [0,1]$. В этом случае при $x \in (0, x_{кр})$ оценка (2) лучше, чем (1), то есть выполнены неравенства (5), а при $x \in (x_{кр}, 1)$ оценка (1) лучше, чем (2), то есть выполнены неравенства (4).

Теорема доказана.

Отобразим графически как рассматриваемая нами область на плоскости $x \ge 0, y \ge 0, x \le y$ разбивается на части в зависимости от того, какое из неравенств на этой части плоскости лучше. Области, где лучше первое неравенство, мы пометили как (1), а где лучше второе – как (2).

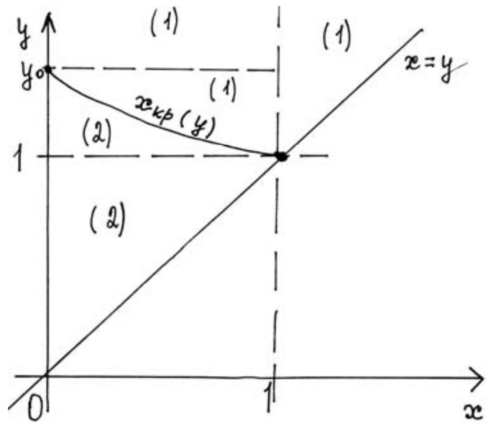

Рис 1. Графическое сравнение неравенств (1) и (2).

Теперь приведём численный пример на третий случай с критическим значением в теореме 1.

Пример 3. Выберем p=4, q=4/3. Тогда получаем $y_0 \approx 1.5098$. Выберем значения $x=0.5, y=2>y_0$. Расчёт даёт

$$xy=1, \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \approx 1.90551, \frac{y^p}{p}+\frac{x^q}{q} \approx 4.29764.$$

В соответствии с теоремой 1 точнее оказывается неравенство (1), так как у него меньше правая часть.

Пример 4. Выберем снова p=4, q=4/3, $y=1.5<y_0$. Расчёт при помощи компьютерного пакета Mathematica решения трансцендентного уравнения (6) даёт значение $x_{кр} \approx 0.0713261$ (кроме указанного корня при выбранных числовых величинах это уравнение имеет ещё комплексно-сопряжённую пару корней и корень $x=1.5$, которые мы не рассматриваем).

Пусть сначала $x=0.05<x_{кр}$. Тогда получаем

$$xy=0.075, \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \approx 1.28781, \frac{y^p}{p}+\frac{x^q}{q} \approx 1.27944.$$

В соответствии с теоремой 1 точнее оказывается неравенство (2), так как у него меньше правая часть.

Если же мы выберем $x=0.1>x_{кр}$, то расчёт даёт

$$xy=0.15, \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \approx 1.28783, \frac{y^p}{p}+\frac{x^q}{q} \approx 1.30044.$$

Теперь в полном соответствии с теоремой 1 точнее оказывается неравенство (1), так как у него меньше правая часть.

Отметим, что в уравнении (6) можно также и при заданном значении x находить решения y, а не наоборот, как делалось в теореме 1. Такое решение будем обозначать $y_{кр}$, в некоторых вопросах его нахождение удобнее.

Например, приведем метод быстрого численного отыскания величины $y_{кр}$. Вводя функцию

$$Z(y)=\frac{y^p}{p}-\frac{y^q}{q},$$

рассмотрим корень уравнения Z(y)=0, который мы ранее обозначили через y_0. Очевидно, что

$$y_0=(\frac{p}{q})^{\frac{1}{p-q}},\ 1<y_{кр}<y_0\ (y_0=1 \text{ при } p=q=2).$$

Величину y_0 можно оценить с использованием неравенств Тибора Радо (см. [6, 13–14]) для среднего логарифмического:

$$\exp(\frac{2}{p+q})\le\exp(1/(\frac{p^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}}{2})^3)\le y_0\le\exp(\frac{1}{\sqrt{pq}}). \quad (7)$$

Теорема 2 [см. 8].

Итерационная последовательность метода Ньютона

$$y_0=(\frac{p}{q})^{\frac{1}{p-q}},\ y_{n+1}=\frac{\frac{y_n{}^p}{q}-\frac{y_n{}^q}{p}+Z(x)}{y_n{}^{p-1}-y_n{}^{q-1}}, \quad (8)$$

монотонно убывая, сходится к величине $y_{кр}$ при условии p>2.

Пример 5. Выберем значения $x=0.5, y=1.3$, p=4, q=4/3. Тогда расчёт даёт значение $Z(x)\approx-0.28201$.

Для величины начального приближения $y_0=3^{\frac{3}{8}}\approx1.509804$ неравенства (7) принимают вид:

$$1.45499\le1.50967\le y_0\approx1.50980\le1.54189.$$

Итерации (8) последовательно дают

y_1=1.38689, y_2=1.35664, y_3=1.35486, y_4=1.35485.

Отметим высокую точность оценки (7) для $y_{кр}$ снизу, характерную для неравенств Тибора Радо.

Аналогичную итерационную процедуру можно определить и для величины $x_{кр}$.

4. Обобщения результатов для трёх чисел. Проведены расчёты и найдены наилучшие возможные оценки для случая неравенства Янга с тремя числами. В этом случае мы уже получаем целых шесть (а для n чисел – всего n!) неравенств Янга вида:

$$xyz\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}+\frac{z^r}{r},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

Этот случай намного сложнее предыдущего. Разберём его более подробно.

Рассмотрим неравенство Янга для трёх переменных x,y,z. Причём в данном случае число возможных вариантов неравенств с перестановками будет равно 3! = 6. Выпишем их все:

1. $x\times y\times z\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}+\frac{z^r}{r}$; (9.1)
2. $x\times y\times z\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^r}{r}+\frac{z^q}{q}$; (9.2)
3. $x\times y\times z\le\frac{x^q}{q}+\frac{y^r}{r}+\frac{z^p}{p}$; (9.3)
4. $x\times y\times z\le\frac{x^q}{q}+\frac{y^p}{p}+\frac{z^r}{r}$; (9.4)
5. $x\times y\times z\le\frac{x^r}{r}+\frac{y^q}{q}+\frac{z^p}{p}$; (9.5)
6. $x\times y\times z\le\frac{x^r}{r}+\frac{y^p}{p}+\frac{z^q}{q}$. (9.6)

Для всех неравенств (9.1.)–(9.6) будут выполняться следующие условия:

- $p,q,r>0$;
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$;
- $x,y,z\ge0$.

Рассмотрим ряд численных примеров.

С учётом выше перечисленных естественных условий рассмотрим численные примеры при значениях *p*=2, *q*=3, *r*=6. Также рассмотрим следующие возможные случаи взаимного расположения трёх чисел:

1. $1\ge z\ge y\ge x\ge0$;
2. $z\ge y\ge x\ge1$;
3. $z\ge1\ge y\ge x\ge0$;
4. $z\ge y\ge1\ge x\ge0$.

Для первого случая положим *x*=0,3; *y*=0,5; *z*=0,7.Отсюда $x\times y\times z=0,3\times0,5\times0,7=0,105$.

Произведя подстановку чисел и выполнив соответствующий расчёт, получим:

1. $0,105\le\frac{0,3^2}{2}+\frac{0,5^3}{3}+\frac{0,7^6}{6}=0,106278167$; (1)
2. $0,105\le\frac{0,3^2}{2}+\frac{0,5^6}{6}+\frac{0,7^3}{3}=0,161904167$; (3)
3. $0,105\le\frac{0,3^3}{3}+\frac{0,5^6}{6}+\frac{0,7^2}{2}=0,256604167$; (5)
4. $0,105\le\frac{0,3^3}{3}+\frac{0,5^2}{2}+\frac{0,7^6}{6}=0,153608167$; (2)
5. $0,105\le\frac{0,3^6}{6}+\frac{0,5^3}{3}+\frac{0,7^2}{2}=0,2867915$; (6)
6. $0,105\le\frac{0,3^6}{6}+\frac{0,5^2}{2}+\frac{0,7^3}{3}=0,2394215$. (4)

Здесь и далее номер слева означает номер по порядку соответствующего перестановочного неравенства (9.1)–(9.6). Номера справа отмечают неравенства в порядке возрастания их правой части, то есть чем меньше этот номер, тем точнее неравенство.

Для второго случая положим *x*=3; *y*=4; *z*=5. Значит $x \times y \times z = 3 \times 4 \times 5 = 60$. Отсюда:

1. $60 \le \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3} + \frac{5^6}{6}$; $60 \le 2629,997$; (6)
2. $60 \le \frac{3^2}{2} + \frac{4^6}{6} + \frac{5^3}{3}$; $60 \le 728,84$; (4)
3. $60 \le \frac{3^3}{3} + \frac{4^6}{6} + \frac{5^2}{2}$; $60 \le 704,17$; (3)
4. $60 \le \frac{3^3}{3} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^6}{6}$; $60 \le 2621,167$; (5)
5. $60 \le \frac{3^6}{6} + \frac{4^3}{3} + \frac{5^2}{2}$; $60 \le 155,33$; (1)
6. $60 \le \frac{3^6}{6} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^3}{3}$; $60 \le 171,17$. (2)

Для третьего случая положим *x*=0,3; *y*=0,5; *z*=5. Значит $x \times y \times z = 0,3 \times 0,5 \times 5 = 0,75$. Отсюда:

1. $0,75 \le \frac{0,3^2}{2} + \frac{0,5^3}{3} + \frac{5^6}{6}$; $0,75 \le 2604,25367$; (5)
2. $0,75 \le \frac{0,3^2}{2} + \frac{0,5^6}{6} + \frac{5^3}{3}$; $0,75 \le 41,717604167$; (3)
3. $0,75 \le \frac{0,3^3}{3} + \frac{0,5^6}{6} + \frac{5^2}{2}$; $0,75 \le 12,511604167$; (1)
4. $0,75 \le \frac{0,3^3}{3} + \frac{0,5^2}{2} + \frac{5^6}{6}$; $0,75 \le 2604,301$; (6)
5. $0,75 \le \frac{0,3^6}{6} + \frac{0,5^3}{3} + \frac{5^2}{2}$; $0,75 \le 12,5417915$; (2)
6. $0,75 \le \frac{0,3^6}{6} + \frac{0,5^2}{2} + \frac{5^3}{3}$; $0,75 \le 41,7951215$. (4)

Для четвёртого случая положим *x*=0,3; *y*=4; *z*=5. Значит $x \times y \times z = 0,3 \times 4 \times 5 = 6$. Отсюда:

1. $6 \le \frac{0,3^2}{2} + \frac{4^3}{3} + \frac{5^6}{6}$; $6 \le 2625,542$; (6)
2. $6 \le \frac{0,3^2}{2} + \frac{4^6}{6} + \frac{5^3}{3}$; $6 \le 724,385$; (4)
3. $6 \le \frac{0,3^3}{3} + \frac{4^6}{6} + \frac{5^2}{2}$; $6 \le 695,179$; (3)
4. $6 \le \frac{0,3^3}{3} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^6}{6}$; $6 \le 2612,176$; (5)
5. $6 \le \frac{0,3^6}{6} + \frac{4^3}{3} + \frac{5^2}{2}$; $6 \le 33,8301215$; (1)
6. $6 \le \frac{0,3^6}{6} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^3}{3}$; $6 \le 49,6701215$. (2)

Рассмотрим другие примеры для первого случая. Пусть *x*=0,001; *y*=0,002; *z*=0,003. Значит $x \times y \times z = 0,001 \times 0,002 \times 0,003 = 6 \cdot 10^{-9}$.

Отсюда:

1. $6 \cdot 10^{-9} \le \frac{0,001^2}{2} + \frac{0,002^3}{3} + \frac{0,003^6}{6}$;
   $6 \cdot 10^{-9} \le 0,0000005026666679$; (1)
2. $6 \cdot 10^{-9} \le \frac{0,001^2}{2} + \frac{0,002^6}{6} + \frac{0,003^3}{3}$;
   $6 \cdot 10^{-9} \le 0,0000005090000001$; (2)
3. $6 \cdot 10^{-9} \le \frac{0,001^3}{3} + \frac{0,002^6}{6} + \frac{0,003^2}{2}$;
   $6 \cdot 10^{-9} \le 0,0000045003333334$; (5)
4. $6 \cdot 10^{-9} \le \frac{0,001^3}{3} + \frac{0,002^2}{2} + \frac{0,003^6}{6}$;
   $6 \cdot 10^{-9} \le 0,0000020003333345$; (3)
5. $6 \cdot 10^{-9} \le \frac{0,001^6}{6} + \frac{0,002^3}{3} + \frac{0,003^2}{2}$;
   $6 \cdot 10^{-9} \le 0,0000045026666667$; (6)
6. $6 \cdot 10^{-9} \le \frac{0,001^6}{6} + \frac{0,002^2}{2} + \frac{0,003^3}{3}$;
   $6 \cdot 10^{-9} \le 0,000002009$. (4)

Пусть *x*=0,997; *y*=0,998; *z*=0,999. Тогда $x \times y \times z = 0,9940109939999999$. Отсюда:

1. $x \times y \times z \le \frac{0,997^2}{2} + \frac{0,998^3}{3} + \frac{0,999^6}{6} =$;
   $0,9940109939999999 \le 0,994010994002499$; (1)
2. $x \times y \times z \le \frac{0,997^2}{2} + \frac{0,998^6}{6} + \frac{0,999^3}{3} =$;
   $0,9940109939999999 \le 0,994015473039968$; (3)
3. $x \times y \times z \le \frac{0,997^3}{3} + \frac{0,998^6}{6} + \frac{0,999^2}{2} =$;
   $= 0,9940194643733014$; (4)
4. $x \times y \times z \le \frac{0,997^3}{3} + \frac{0,998^2}{2} + \frac{0,999^6}{6} =$;
   $= 0,9940134876691656$; (2)
5. $x \times y \times z \le \frac{0,997^6}{6} + \frac{0,998^3}{3} + \frac{0,999^2}{2} =$;
   $= 0,9940269075355905$; (6)
6. $x \times y \times z \le \frac{0,997^6}{6} + \frac{0,998^2}{2} + \frac{0,999^3}{3} =$;
   $= 0,9940254098689238$. (5)

5. Основные теоремы. На основании анализа численных расчётов, часть из которых приведена в качестве иллюстрации возможных случаев выше, можно сделать определённые общие выводы. При этом строгие доказательства удаётся получить для тех двух случаев, когда все три положительных числа лежат по одну сторону от единицы на числовой оси, то есть или 0<x<y<z<1, или 1<x<y<z. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 3. *Рассмотрим шесть вариантов (9.1)–(9.6) неравенства Янга для трёх чисел. Пусть выполнены сформулированные выше естественные* *ограничения на числа и параметры. При условии, что выполнены неравенства* $0 \le x \le y \le z \le 1$, *наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из шести неравенств Янга (9.1)–(9.6) будет то, в котором параметры p,q,r упорядочены по возрастанию* $p \le q \le r$, *а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) – по убыванию* $p \ge q \ge r$.

Теорема 4. *Рассмотрим шесть вариантов (9.1)–(9.6) неравенства Янга для трёх чисел. Пусть выполнены сформулированные выше естественные ограничения на числа и параметры. При условии, что выполнены неравенства* $1 \le x \le y \le z$, *наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из шести неравенств Янга (9.1)–(9.6) будет то, в котором параметры p,q,r упорядочены по убыванию* $p \ge q \ge r$, *а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) – по возрастанию* $p \le q \le r$.

Доказательства приведённых теорем несложны, они основаны на наблюдении, что любая перестановка хотя бы пары слагаемых в правых частях из оптимального расположения ухудшает исследуемое неравенство. Приведём доказательство теоремы 3, теорема 4 доказывается аналогично.

Доказательство *теоремы 3.* Предположим без ограничения общности, что выполнены соотношения $0 \le x \le y \le z \le 1$ для чисел и соотношения $1 < p \le q \le r$ для параметров в неравенствах Янга (9.1)–(9.6). Покажем, что в этом случае наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из шести неравенств Янга (9.1)–(9.6) будет неравенство (9.1)

$$x \times y \times z \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^r}{r}$$

Для этого убедимся, что при любой перестановке параметров в паре слагаемых из правой части её значение может только увеличиться. Например, рассмотрим вариант с перестановкой параметров первого и третьего слагаемых из правой части. Тогда мы должны сравнить последнее неравенство с таким:

$$x \times y \times z \le \frac{x^r}{r} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^p}{p}$$

в котором поменялись местами параметры r,p. Наша цель показать, что первоначальное неравенство было точнее, то есть, что

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^r}{r} \le \frac{x^r}{r} + \frac{y^q}{q} + \frac{z^p}{p},$$

или

$$\begin{gathered} \frac{x^p}{p} + \frac{z^r}{r} \le \frac{x^r}{r} + \frac{z^p}{p}, \\ \frac{x^p}{p} - \frac{x^r}{r} \le \frac{z^p}{p} - \frac{z^r}{r}. \end{gathered} \tag{10}$$

Для этого введём вспомогательную функцию

$$f(t) = \frac{t^p}{p} - \frac{t^r}{r}.$$

Очевидно, что производная этой функции неотрицательна

$$f'(t) = t^{p-1} - t^{r-1} \ge 0$$

при условиях 0<t<1, 0<p–1<r–1. Следовательно, функция монотонно возрастает, $f(x) \le f(z)$, и выполнено соотношение (10).

Аналогично, правая часть неравенства может только увеличиться и при любой другой попарной перестановке параметров.

Временно обозначим символом $\lhd$ соотношение между неравенствами (9.1)–(9.6), причем $(9.i) \lhd (9.j)$ означает, что первое из неравенств точнее, то есть имеет меньшую правую часть. Тогда из доказанного получаем при сделанных обозначениях путём попарных перестановок две цепочки неравенств:

$$(9.1) \lhd (9.4) \lhd (9.3) \lhd (9.5),$$
$$(9.1) \lhd (9.2) \lhd (9.6) \lhd (9.5).$$

Следовательно, неравенство (9.1) действительно наилучшее, а (9.5) – наихудшее в естественном смысле.

Теорема доказана.

Теоремы 3,4 и их доказательства практически дословно переносятся на случай любого количества чисел.

Эти результаты охватывают только *крайние и некоторые промежуточные случаи* при упорядочивании параметров неравенства Янга. Разбор всех промежуточных случаев упорядочивания является намного более сложным, даже для трёх чисел.

Рассмотрен также случай неравенства Янга для четырёх чисел. В этом случае получается набор из 24 неравенств, вместо единственного, которое рассматривалось ранее. Если разбирать случаи расположения четырёх чисел относительно единицы, то это даст 5 различных случаев, всего получаются 120 вариантов. Проведены численные расчёты для всех этих случаев. Для большего количества параметров перебор теряет смысл, нужны новые идеи для упорядочивания всей совокупности неравенств.

Как было отмечено выше, крайние случаи «лучшего» и «худшего» из всего семейства неравенств находятся просто. Вместе с тем основное задачей является упорядочивание остального массива неравенств. Различные случаи разбивают пространство на области в зависимости от размерности при помощи граничных кривых, поверхностей или многообразий, при переходе через которые изменяются соотношения между различными правыми частями неравенства Янга. Однако полное описание таких разграничивающих областей получено только для случая двух чисел, оно пока неизвестно даже для 3 или 4 чисел.

6. Приложения результатов и перспективы дальнейших исследований. Теперь наметим некоторые возможные приложения и обобщения полученных результатов.

1. Можно рассмотреть случай неравенств Вильяма Янга (теперь мы знаем, что их два!) с парой произвольных взаимно дополнительных функций Янга

$$xy \le N(x) + M(y),\; xy \le N(y) + M(x), \qquad (11)$$

где функция $M(x)$ непрерывна и неотрицательна при $x \in [0,\infty)$, $M(0)=0, \lim_{x\to+\infty} M(x)/x = +\infty$, функция $N(x)$ также непрерывна и неотрицательна при $x \in [0,\infty)$, возрастает и выпуклая [10–11].

Существует и более простая формулировка этого неравенства в терминах одной функции и её обратной [6]. В этом случае пара функций Янга связана друг с другом двойственными формулами преобразования Лежандра–Янга–Фенхеля [13–14]

$$N(x) = \max_{y\ge0}(xy - M(y)),$$
$$M(y) = \max_{x\ge0}(xy - N(x)).$$

Оказывается, что и в этой более общей формулировке можно полностью повторить результаты, полученные выше для простейшего случая. Если выразить одну из функций Янга по формуле $N(x) = \int_0^x f(t)dt$, то роль пограничного условия $x = 1$ заменит условие $f(x) = x$.

2. Рассмотреть уточнения с другими конкретными функциями Янга [6, 10, 11].

3. По обычной схеме [3–4,6] можно из полученного уточнённого неравенства Янга вывести уточнённое неравенство Гёльдера (или исторически более точно: Роджерса–Гёльдера–Рисса, см. [13]). Результаты получаются как для дискретного, так и для интегрального случаев.

4. Более подробно изучить итерационную схему (8) и другие методы решения трансцендентного уравнения (6).

5. На случай неравенств Янга и Гёльдера перенести разработанный С.М. Ситником метод уточнения неравенств Коши – Буняковского с помощью произвольных средних значений [12–17].

6. Обычно не отмечается тот факт, что из неравенства Янга можно вывести и обратное к нему с противоположной оценкой. Действительно, подставим в (1) вместо чисел x, y обратные к ним. Тогда получим [9]:

$$\frac{1}{x}\frac{1}{y} \le \frac{1}{px^p} + \frac{1}{qy^q}, \qquad xy \ge \frac{1}{\dfrac{1}{px^p} + \dfrac{1}{qy^q}}.$$

Из приведённых результатов следует, что получены уточнения и этого обратного неравенства, оценивающего произведение чисел снизу. Также возможно рассмотрение случая трёх и более чисел и параметров.

Авторы благодарят рецензентов за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения*. М.: Мир, 1983. – 575 с. (доп. издание: Marshall A.W., Olkin I., Barry C. A. Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. 2-nd ed. Springer. – 2011. – 940 P.)
2. Young W. H. On classes of summable functions and their Fourier series. *Proc. Roy. Soc. London (A)*. – 1912. – N 87. – P. 225–229.
3. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства*. ИЛ. – 1948. – 456 с.
4. Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства*. М., Мир. – 1965. – 276 с.
5. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*. М.: Мир, 1974. – 488 с.
6. Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M. *Classical and new inequalities in Analysis*. Kluwer. 1993. – 740 p.
7. Анциферова Г.А., Ситник С.М. О некоторых свойствах выпуклых функций *Тезисы докл. межд. конф., посвящённой 75-летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д. Кудрявцева.* М. – 1998. – С. 269.
8. Анциферова Г.А., Ситник С.М. Некоторые обобщения неравенства Юнга. *Вестник Воронежского института МВД России*. –1999. – N 2(4). – С. 161–164.
9. Ситник С.М. Сколько неравенств заключено в неравенстве Юнга? *Труды Всеросс. заочной научно-практич. конф. "Актуальные проблемы обучения математике", посвящённой 155-летию со дня рождения Андрея Петровича Киселёва*. Орёл, Орловский государственный университет. – 2007. – С. 464–469.
10. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича*. М., Физматгиз. – 1958. – 271 с.
11. Натансон И.П. *Теория функции вещественной переменной*. М., Наука. – 1974. – 480 с.
12. Sitnik S.M. Refinements of the Bunyakovskii – Schwartz inequalities with applications to special functions estimates. *Conf. in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's 60th Birthday*. Linkoping University, Sweden. – 1996. – P. 97.
13. Sitnik S.M. *Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey.* http:arxiv.org/abs/1012.3864. – 51 p.
14. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств. *Итоги науки. Южный федеральный округ. Сер. "Математический форум". Том 3. Исследования по математическому анализу.* Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев (ред.). Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания, Владикавказ. – 2009. – С. 221 – 266.

15. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши–Буняковского методом средних значений и их приложения. *Чернозёмный альманах научных исследований. Серия: "Фундаментальная математика". Специальный выпуск: Избранные труды участников Воронежского математического семинара по анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям*. (Под ред: Минин Л.А., Новиков И.Я., Родин В.А., Ситник С.М.). Воронеж. – 2005. – N 1(1). – С. 3 – 42.
16. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши–Буняковского. *Вестник Самарской государственной экономической академии*. – 2002. – N 1(8). – С. 302 – 313.
17. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. "Физико-математические науки"*. – 2000. – Вып. 9. – С. 37 – 45.
18. Ковальчук А.А. Об обобщении неравенства Янга для трёх чисел. *Сборник материалов Всероссийской научно - практической конференции "Актуальные вопросы эксплуатации систем охраны и защищённых телекоммуникационных систем"*. Воронеж, Воронежский институт МВД. – 2011.– С. 117–118.