УДК 517.928

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ І ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

Ключник І.Г.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Україна

За допомогою матриці перетворення система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту асимптотично зводиться до інтегрованої системи рівнянь.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: диференціальні рівняння, малий параметр, точка звороту, матриця перетворення.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Ключник И.Г.

С помощью матрицы преобразования система дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных с точкой поворота асимптотически сводится к интегрируемой системе уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифференциальные уравнения, малый параметр, точка поворота, матрица преобразования.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETERS AND TURNING POINTS

Kluchnik I.G.

With the help of the transformation matrix the system of differential equations with a small parameter at some derivatives with a turning point is asymptotically reduced to an integrable system of equations.

Keywords: differential equation, small parameter, the turning point, the transformation matrix.

1. Введение. В [1–7] приводиться огляд літератури з основних методів асимптотичного інтегрування сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту. В [8] вперше розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. В даній роботі система диференціальних рівнянь, розглядувана в [8], асимптотично зводиться до інтегрованої системи рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + A_1(x)y_1, \\ \varepsilon y'_1 &= (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y \in R^p, y_1 \in R^2$, $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ – голоморфні при

$$|x| \le x_0 \tag{2}$$

матриці, $B(x)$ – матриця вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, ε – малий додатній параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Будемо вважати, що

$$trB_1(x) = trA(x) \equiv 0. \tag{3}$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C_2(\varepsilon)v, \tag{4}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_2(\varepsilon)u, \tag{5}$$

в якій $\Phi(x,\varepsilon)$ – блочна матриця вигляду

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x,\varepsilon) & V_1(x,\varepsilon) \\ U_1(x,\varepsilon) & V(x,\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{6}$$

і матриці $U(x,\varepsilon), U_1(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon), V(x,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями ε

$$\begin{aligned} U(x,\varepsilon) &= U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x), \\ U_1(x,\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x), \\ V(x,\varepsilon) &= V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x), \\ V_1(x,\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Розглянемо відповідно $(p\times 2)$- і $(2\times p)$-вимірні матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ у вигляді

$$C_2(\varepsilon)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^n C_n, & \text{якщо } 0<\varepsilon\le\varepsilon_0\\ C_0, & \text{якщо } \varepsilon=0,\end{cases} \tag{8}$$

$$D_2(\varepsilon)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^n D_n, & \text{якщо } 0<\varepsilon\le\varepsilon_0\\ D_0, & \text{якщо } \varepsilon=0,\end{cases}$$

β – раціональне число з проміжку (0;1) таке, що при фіксованому $\varepsilon\in[-\varepsilon_0;\varepsilon_0]$ число ε^{β} є додатнім:

$$b_n=\begin{cases}\|C_n\|^{-1}, & \text{якщо } C_n\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } C_n=0,\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}\|D_n\|^{-1}, & \text{якщо } D_n\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } D_n=0,\end{cases} \tag{9}$$

C_n, D_n сталі матриці вигляду

$$C_n=\begin{pmatrix}c_{1n} & 0\\ \cdots & \cdots\\ c_{pn} & 0\end{pmatrix},\quad D_n=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ d_{n1} & \cdots & d_{np}\end{pmatrix}.$$

Лема. Матричні ряди (8) є рівномірно збіжні при $0<|\varepsilon|\le\varepsilon_0$. Матричні функції $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ є нескінченно диференційовані при $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$ та мають асимптотичні розвинення

$$C_2(\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_n,\quad D_2(\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n D_n,\quad \varepsilon\to 0. \tag{10}$$

Доведення. Користуючись (9) та нерівністю

$$|1-\exp\alpha|<|\alpha|,\quad \alpha\in R, \alpha<0,$$

оцінимо норму матриці

$$\begin{aligned}&\left\|(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^n C_n\right\|\le\\ &\le\|C_n\|b_n|\varepsilon|^{n-\beta}\le\varepsilon_0^{n-\beta},\end{aligned}\qquad |\varepsilon|\le\varepsilon_0, \tag{11}$$

$n=0,1,\ldots$. Отже, ряд (8) рівномірно збіжний при $0<|\varepsilon|\le\varepsilon_0$.

Знайшовши j-ту похідну, $j=\overline{1,k}$ від функції $\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})$

$$(\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))^{(j)}=\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})\sum_{i=1}^{j}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=j,\\ j_{i>0}}}c_{j_1\ldots j_i}b_n^j(-1)^{i+j}\varepsilon^{-(i\beta+j)}\times$$
$$\times(\beta(\beta+1)\ldots(\beta+j_1-1))\ldots(\beta(\beta+1)\ldots(\beta+j_i-1)),$$

одержимо вигляд почленного диференціювання ряду (8) k разів:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon^n C_n(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})))^{(k)}=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))n(n-1)\ldots(n-k+1)\times\\ &\times\varepsilon^{n-k}-C_n\sum_{j=1}^{k-1}C_k^j\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})\sum_{i=1}^{j}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=j,\\ j_{i>0}}}c_{j_1,\ldots j_i}b_n^j\times\\ &\times(-1)^{i+j}\varepsilon^{-(i\beta+j)}(\beta(\beta+1)\ldots(\beta+j_1-1))\ldots(\beta\times\\ &\times(\beta+1)\ldots(\beta+j_i-1))n(n-1)\ldots(n-k+j+1)\varepsilon^{n-k+j}-(1\\ &-C_n\varepsilon^n\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})\sum_{i=1}^{j}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=k,\\ j_{i>0}}}b_n^i(-1)^{i+k}\varepsilon^{-(i\beta+j)}(\beta\times\\ &\times(\beta+1)\ldots(\beta+j_1-1))\ldots(\beta(\beta+1)\ldots(\beta+j_i-1))),\end{aligned}\qquad 2)$$

де $c_{j_1\ldots j_i}$ – стала, яка не залежить від n, C_k^j – число сполук з k елементів по j.

Врахувавши (9), нерівність (11) та нерівність

$$(|\varepsilon|^{-\beta}b_n)^i\exp(-\frac{b_n}{|\varepsilon|^{\beta}})\le\sup_{y>0}(y^i e^{-y})=(\frac{i}{e})^i,\quad i=\overline{1,j},$$

можемо оцінити норму кожного члена ряда (12). Звідки випливає рівномірна збіжність ряду (12) при $0<|\varepsilon|\le\varepsilon_0$. Використовуючи (12) одержимо k-ту похідну $C_1^k(\varepsilon)$ в точці $\varepsilon=0$ вигляду

$$C_1^k(0)=k!C_k.$$

З останньої рівності і (12) випливає неперервність k– ої похідної $C_1^k(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$.

Для доведення того, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_n$ є асимптотичним розвиненням при $\varepsilon\to 0$ функції $C_2(\varepsilon)$, представимо $C_2(\varepsilon)$ у вигляді

$$\begin{aligned}&C_2(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{r}\varepsilon^n C_n-\sum_{n=0}^{r}\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})\varepsilon^n C_n+\\ &+\sum_{n=r+1}^{\infty}(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^n C_n==\sum_{n=0}^{r}\varepsilon^n C_n+\varepsilon^{r+1}\times\\ &\times(\sum_{n=r+1}^{\infty}(1-\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}}))\varepsilon^{n-r-1}C_n-\sum_{n=0}^{r}\exp(-\frac{b_n}{\varepsilon^{\beta}})\varepsilon^{n-r-1}C_n).\end{aligned}$$

Тобто при $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$ матрицю $C_2(\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді

$$C_2(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{r}\varepsilon^n C_n+O(\varepsilon^{r+1}). \tag{13}$$

Лема доведена.

З (1), (4), (5) випливає, що матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Phi'+\Phi\begin{pmatrix}0 & \varepsilon C(\varepsilon)\\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x)\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}\varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x)\\ \varepsilon B_2(x) & B(x)+\varepsilon B_1(x)\end{pmatrix}\Phi.\end{aligned} \tag{14}$$

Підставляючи (6) в (14) одержимо, що матриці $V(x,\varepsilon)$, $U(x,\varepsilon)$, $U_1(x,\varepsilon)$, $V_1(x,\varepsilon)$ задовольняють матричним диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned} &U'(x,\varepsilon)+V_1(x,\varepsilon)D_2(\varepsilon)= \\ &=A(x)U(x,\varepsilon)+A_1(x)U_1(x,\varepsilon), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon V_1'(x,\varepsilon)+\varepsilon U(x,\varepsilon)C_2(\varepsilon)+V_1(x,\varepsilon)B(x)= \\ &=\varepsilon A(x)V_1(x,\varepsilon)+\varepsilon A_1(x)V(x,\varepsilon), \\ &\varepsilon U_1'(x,\varepsilon)+\varepsilon V(x,\varepsilon)D_2(\varepsilon)=\varepsilon B_2(x)U(x,\varepsilon)+ \\ &+\varepsilon B_1(x)U_1(x,\varepsilon)+B(x)U_1(x,\varepsilon), \\ &\varepsilon V'(x,\varepsilon)+\varepsilon U_1(x,\varepsilon)C_2(\varepsilon)+V(x,\varepsilon)B(x)= \\ &=\varepsilon B_2(x)V_1(x,\varepsilon)+\varepsilon B_1(x)V(x,\varepsilon)+B(x)V(x,\varepsilon). \end{aligned}$$

Підставивши в одержані рівняння розвинення матриць $V(x,\varepsilon), U(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon), U_1(x,\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ у вигляді (7), (13) отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів розвинень (7), (10), які знайдені в [8]. Підставляючи знайдені матриці $C_n, D_n, n=0,1,...$ в (8) однозначно визначимо матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ у вигляді рівномірно збіжних степеневих рядів при $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$.

Таким чином доведена наступна теорема:

Теорема. Нехай матриці системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді система рівнянь (1) зводиться до системи (4), (5) за допомогою перетворення (6). Матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (14) і є голоморфною за змінною x в області $|x|\le x_0, |\varepsilon|\le\varepsilon_0$, а також $\det\Phi(x,0)\equiv 1$. Коефіцієнти $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ рівняння (15) зображуються у вигляді рівномірно збіжних при $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$ рядів (8). Матриці $C_2(\varepsilon), D_2(\varepsilon)$ є нескінченно диференційовані при $|\varepsilon|\le\varepsilon_0$ і мають асимптотичні розвинення (10).

ЛІТЕРАТУРА

1. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.:Мир. – 1968. – 464с.
2. Wasow W. *Linear turning point theory*. Springer-Verlag New York. 1985. – 243 p
3. Lee R.Y. On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point *J. Math. Anal. and Appl*. – 1969. – v. 27. – P. 501 – 510.
4. Hanson R.J. Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point *J. Math. Anal. And Appl*. – 1966. – v. 16. – P. 280 – 301.
5. Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point *Memoirs of the Amer. Math. Soc*. – 1974. – v. 149. – P. 3 – 106
6. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука. – 1983. – 352с.
7. Turritin H.L. Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation. *Trans. Am: Math. Soc*. – 1950. – v. 68. – P. 304 – 329.
8. Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных Укр. мат. журн. – 2002. – v. 54, N 11. – C. 1505 – 1516.
9. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.:Мир. – 1968. – 464 с.