УДК 513.88

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Димитрова-Бурлаенко С.Д.

Национальный Технический Университет „ХПИ”, Харьков, Украина

Рассмотрены абстрактные функции, заданные на группе со значениями в пространстве Фреше. Показано, что квазиравномерный предел по всем подпоследовательностям сохраняет почти периодичность. Найдены необходимые и достаточные условия сохранения почти периодичности при предельном переходе.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: почти периодические функции, сходимость, необходимое и достаточное условие.

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Димитрова-Бурлаенко С.Д.

Розглянуто абстрактні функції, які задані на групі зі значеннями в просторі Фреше. Показано, що квазірівномірна границя по всіх підпослідовностях зберігає майже періодичність. Знайдено необхідні і достатні умови збереження майже періодичності при граничному переході.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: майже періодичні функції, збіжність, необхідна і достатня умова.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVERGENCE OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS TO ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

Dimitrova-Burlaenko S.D.

The abstract functions defined on the group with values in a Fréchet space are considered. It is shown the quasi-uniform limit for all subsequences retains almost periodicity. The necessary and sufficient conditions for the preservation of almost periodicity at the limit transitions are found.

KEYWORDS: almost periodic functions, convergence, necessary and sufficient condition.

1. Введение. В работе рассмотрены функции, заданные на группе G, со значениями в пространстве Фреше Y. На группе G заданы две топологии $\Im_0$ и $\Im$ со счетной базой. Пространство Y предполагается сепарабельным. Топология пространства Y задана при помощи счетной возрастающей системы полунорм $\{p_\alpha(.)\}_{\alpha=1}^{\infty}$, $p_\alpha(.) \le p_{\alpha+1}(.)$ с метрикой $\rho(y,z) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{p_\alpha(y-z)}{2^\alpha(1+p_\alpha(y-z))}$. Функцию будем называть компактной, если множество ее значений является относительно компактным множеством в Y.

Определение 1. *Заданная на* G *абстрактная функция* $f(t):(G,\Im_0)\to Y$, *называется почти периодической (п.п.) на* G, *если множество* $\{f_t(a,b)=f(atb),\ t\in G\}$ *функций, заданных на* $G\times G$, *относительно компактно в топологии равномерной сходимости, т.е. по метрике*

$$d(f_t,f_\tau) = \sup_{a,b\in G} \rho(f(atb), f(a\tau b)).$$

Это определение для комплекснозначных функций дано фон Нейманом [8].

Предложение ([4]). *Непрерывная функция* $f(t):(G,\Im_0)\to Y$ *является почти периодической (п.п.ф.) тогда и только тогда, когда каждое множество вида*

$$U_{\alpha,\varepsilon} = \left\{ \tau\in G : \sup_{a,b\in G} \frac{p_\alpha(f(a\tau b)-f(ab))}{1+p_\alpha(f(a\tau b)-f(ab))} < \varepsilon \right\}$$

относительно плотно на группе G, для любого $\varepsilon>0$.

Это предложение является развитием идеи о конечном ε*- делении пространства* ([7], *см. также* [6] *определение 5.1.6, теорема 5.1.2, определение 6.3, лемм 6.1.1–6.1.3).*

Определение 2. *Последовательность функций* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *является квазиравномерно сходящейся по* *последовательностям к функции* $f(t)$, *если:*

а) последовательность функций $\left\{f_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится поточечно к функции* $f(t)$, $\lim\limits_{n} f_n(t)=f(t),\ \forall t\in G$

б) $\forall\varepsilon>0$, *индекса N и любой последовательности* $\left\{t'_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}\subset G$ *найдутся*

индекс n_0 *и подпоследовательность элементов* $\left\{t_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ *так, что*

$$\rho\left(f\left(t_\beta\right),f_{n_0}\left(t_\beta\right)\right)<\varepsilon\ ,\ \beta=1,2,3,...,$$

$$\left\{t_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}\subset\left\{t'_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}\ \text{ и }\ n_0>N\,;$$

в) условие б)справедливо для любой подпоследовательности функций $\left\{f_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечание 1. Эта сходимость слабее равномерной. Легко построить пример функции, где сходимость квазиравномерная.

Это определение новое, и формально не совпадает с определением Ч. Арцела [1], [2] квазиравномерной сходимости, хотя оно возникло благодаря определению Ч. Арцела.

2.Основные результаты. Докажем несколько вспомогательных утверждений, выясняющие некоторые свойства введенной сходимости:

Лемма 1. *Квазиравномерный предел* $f(t)$ *непрерывных (в топологии* $\Im$ *) функций* $\left\{f_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *является непрерывной функцией (в топологии* $\Im$ *).*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть функция $f(t)$ терпит разрыв в точке t_0, т.е. существует $\varepsilon_0>0$ и последовательность

$$\left\{t'_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset G\ ,\ \lim_{n} t'_n=t_0\ \text{ и }\ \rho\left(f\left(t'_n\right),f\left(t_0\right)\right)\ge\varepsilon_0 \ .$$

По числу $\varepsilon_0/3$ из поточечной сходимости в точке t_0 находим номер N_1 такой, что при $n>N_1$

$$\rho\left(f_n\left(t_0\right),f\left(t_0\right)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad n=N_1+1,\ N_1+2,...$$

Согласно определению 2, по числу $\varepsilon_0/3$, $N=N_1$ и последовательности $\left\{t'_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ находим индекс $n_0>N_1$ и подпоследовательность $\left\{t_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset\left\{t'_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ так, что

$$\rho\left(f_{n_0}\left(t_n\right),f\left(t_n\right)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Из сходимости последовательности $\left\{t_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ к элементу t_0 и непрерывности функции $f_{n_0}(t)$ находим элемент t из $\left\{t_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (в действительности, таких элементов бесконечно много), для которого

$$\rho\left(f_{n_0}(t),f_{n_0}\left(t_0\right)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3}\ .$$

Тогда для найденного $t\in\left\{t_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset\left\{t'_n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\varepsilon_0\le\rho\left(f(t),f(t_0)\right)\le\rho\left(f(t),f_{n_0}(t)\right)+$$
$$\rho\left(f_{n_0}(t),f_{n_0}(t_0)\right)+\rho\left(f_{n_0}(t_0),f(t_0)\right)<$$
$$\frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_0}{3}=\varepsilon_0\,.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Квазиравномерный предел компактных функций– компактная функция.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Допустим, что предельная функция $f(t)$ не компактна. Тогда найдется $\varepsilon_0>0$ и последовательность $\left\{t'_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ такие, что

$$\rho\left(f(t'_\beta),f(t'_\gamma)\right)\ge\varepsilon_0\,,\quad \beta\ne\gamma\ .$$

По $\varepsilon_0/3>0$, согласно определению 2, выбираем подпоследовательность $\left\{t''_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}\subset\left\{t'_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ и n_0 так, что

$$\rho\left(f(t''_\beta),f_{n_0}(t''_\beta)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad \beta=1,2,3,...\ .$$

Из компактной функции $f_{n_0}(t)$ выбираем такую подпоследовательность, $\left\{t_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}\subset\left\{t''_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$, чтобы последовательность $\left\{f_{n_0}(t_\beta)\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ являлась фундаментальной, т.е.

$$\rho\left(f_{n_0}(t_\beta),f_{n_0}(t_\gamma)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3}\qquad \beta,\gamma>M\ .$$

Для последовательности $\left\{t_\beta\right\}_{\beta>M}$ выполнены следующие неравенства

$$\varepsilon_0\le\rho\left(f(t_\beta),f(t_\gamma)\right)\le\rho\left(f(t_\beta),f_{n_0}(t_\beta)\right)+\rho\left(f_{n_0}(t_\beta),f_{n_0}(t_\gamma)\right)+$$

$$+\rho\left(f_{n_0}(t_\gamma),f(t_\gamma)\right)<\varepsilon_0\,,\qquad \beta,\gamma>M\ .$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Квазиравномерный по подпоследовательностям предел равномерно непрерывных функций на* $(G,\Im)$ *– равномерно непрерывная функция на* $(G,\Im)$.

Доказательство. Допустим противное, т.е., что предельная функция *f(t)* не является равномерно непрерывной на $(G,\Im)$. Тогда существует $\varepsilon_0>0$ и две последовательности $\left\{x_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$, $\left\{y_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{\beta\to\infty}x_\beta y_\beta^{-1}=e \tag{1}$$

и

$$\rho\left(f(x_\beta),f(y_\beta)\right)\ge\varepsilon_0 \tag{2}$$

Согласно определению 2, по числу $\varepsilon_0/3$ и по двум последовательностям $\left\{x_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$, $\left\{y_\beta\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ выберем: подпоследовательность $\left\{x_\beta^{(1)}\right\}_{\beta=1}^{\infty}$ и индекс n_1 так, чтобы

$$\rho\left(f\left(x_\beta^{(1)}\right), f_{n_1}\left(x_\beta^{(1)}\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \beta = 1,2,\dots .$$

Всегда вместе с выбранной подпоследовательностью $\left\{x_\beta^{(1)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ выбирается и соответствующая подпоследовательность $\left\{y_\beta^{(1)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ из $\left\{y_\beta\right\}_{\beta=1}^\infty$. Этим обеспечивается выполнение условий (1) и (2) для новых подпоследовательностей. Из последовательности $\left\{x_\beta^{(1)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ и последовательности $\left\{f_n(t)\right\}_{n>n_1}$, которая также квазиравномерно сходится к функции *f*(*t*), выбираем подпоследовательность $\left\{x_\beta^{(2)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ и индекс n_2 так, чтобы

$$\rho\left(f\left(x_\beta^{(2)}\right), f_{n_2}\left(x_\beta^{(2)}\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \beta = 1,2,\dots .$$

Процесс повторяется для последовательности $\left\{f_n(t)\right\}_{n>n_2}$ и так далее. Таким образом, выбраны последовательности $\left\{x_\beta^{(k)}\right\}_{\beta=1}^\infty$, $k = 1,2,3,\dots$. Используя канторовский диагональный процесс, выбираем диагональную последовательность $\left\{x_\beta^{(\beta)}\right\}_{\beta=1}^\infty$. Полученная последовательность функций $\left\{f_{n_\beta}(t)\right\}_{\beta=1}^\infty$, согласно предположениям теоремы квазиравномерно сходится к $f(t)$. Тогда по $\varepsilon_0/3>0$ из последовательности $\left\{y_\beta^{(\beta)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ можно извлечь подпоследовательность $\left\{y_\beta^{(0)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ и определить индекс $q = n_{\beta_0}$ так, чтобы

$$\rho\left(f\left(y_\beta^{(0)}\right), f_q\left(y_\beta^{(0)}\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \ \beta > q .$$

Тогда для последовательностей $\left\{x_\beta^{(0)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ и $\left\{y_\beta^{(0)}\right\}_{\beta=1}^\infty$ и для индекса q выполнены неравенства:

$$\rho\left(f\left(x_\beta^{(0)}\right), f_q\left(x_\beta^{(0)}\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \qquad \beta > q,$$

$$\rho\left(f\left(y_\beta^{(0)}\right), f_q\left(y_\beta^{(0)}\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \qquad \beta > q,$$

$$\lim_{\beta\to\infty} x_\beta^{(0)}\left(y_\beta^{(0)}\right)^{-1} = e .$$

Из равномерной непрерывности функции $f_q(t)$, по числу $\varepsilon_0/3$ определим окрестность единицы U_δ такую, что

$$\rho\left(f_q(t), f_q(\theta)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

при

$$t\theta^{-1} \in U_\delta .$$

Из последовательностей $\left\{x_\beta^{(0)}\right\}_{\beta=q+1}^\infty$ и $\left\{y_\beta^{(0)}\right\}_{\beta=q+1}^\infty$ извлечем подпоследовательности $\left\{x''_\beta\right\}_{\beta=1}^\infty$, $\left\{y''_\beta\right\}_{\beta=1}^\infty$ такие, что

$$x''_\beta (y''_\beta)^{-1} \in U_\delta .$$

Следовательно,

$$\rho\left(f_q\left(x''_\beta\right), f_q\left(y''_\beta\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \qquad \beta = 1,2,3,\dots .$$

Для последних двух последовательностей имеем:

$$\varepsilon_0 \le \rho\left(f\left(x''_\beta\right), f\left(y''_\beta\right)\right) \le$$
$$\rho\left(f\left(x''_\beta\right), f_q\left(x''_\beta\right)\right) + \rho\left(f_q\left(x''_\beta\right), f_q\left(y''_\beta\right)\right) +$$
$$\rho\left(f\left(x''_\beta\right), f_q\left(x''_\beta\right)\right) + < \varepsilon_0$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Если задана последовательность почти периодических функций* $f_n(t)$, $n = 1,2,3,\dots$ *на группе* $(G, \mathfrak{I}_0)$, *то существует топология на группе G, в которой непрерывны все функции и любая компактная функция g(t), которая равномерно непрерывна в этой топологии, является почти периодической функцией на группе G.*

Доказательство. Пусть задано множество $f_n(t)$, $n = 1,2,3,\dots$ почти периодических функций на группе $(G, \mathfrak{I}_0)$. На группе *G* введем топологию $\mathfrak{I}_U$ при помощи окрестностей

$$B_{\varepsilon,\sigma,\beta} = \left\{\tau \in G : \sup_{a,b\in G} \max_{n\in\sigma} \frac{p_\beta\left[f_n(a\tau b) - f_n(ab)\right]}{1 + p_\beta\left[f_n(a\tau b) - f_n(ab)\right]} < \varepsilon\right\}$$

,

где σ – конечное множество натуральных чисел, $\varepsilon > 0$, $p_\beta(\ ), \beta = 1,2,,3,\dots$ множество возрастающих полунорм на *Y,* задающие топологию пространства Фреше Y.

Множества $B_{\varepsilon,\sigma,\beta}$ являются конечными пересечениями множеств вида

$$U_{\alpha,\varepsilon} = \left\{\tau \in G : \sup_{a,b\in G} \frac{p_\alpha\left(f_n(a\tau b) - f_n(ab)\right)}{1 + p_\alpha\left(f_n(a\tau b) - f_n(ab)\right)} < \varepsilon\right\}$$

.

Проверим, что эти множества относительно плотны в *G*. Действительно, пусть даны две функции $f:(G,\mathfrak{I}) \to Y$ и $h:(G,\mathfrak{I}) \to Y$. Рассмотрим функцию $F = \{f;h\}:(G,\mathfrak{I}) \to Y\times Y$. В пространстве $Y\times Y$ метрика задана следующим образом:

$$d(x,y) = \max\left\{d(x_1,y_1);\ d(x_2,y_2)\right\},$$

.

Если каждая из функций f и h почти периодична, то множества $\overline{\left\{f(atb): t\in G\right\}}$, $\overline{\left\{h(atb): t\in G\right\}}$ компактны. По теореме Тихонова множество $\left\{\left\{\overline{f(atb)}; \overline{h(atb)}\right\}: t\in G\right\}$ является компактом и функция $F=\{f;h\}$ почти периодична. По предложению 1 [4], для любого ε>0 множество

$$U_{f,\alpha,\varepsilon}\bigcap U_{g,\alpha,\varepsilon}=$$

$$U_\varepsilon=\left\{\tau\in G:\ \sup_{a,b\in G}\frac{p_\alpha\left(F(a\tau b)-F(ab)\right)}{1+p_\alpha\left(F(a\tau b)-F(ab)\right)}<\varepsilon\right\}=$$

$$=\left\{\tau\in G:\ \sup_{a,b\in G}\left(\max\left(\frac{p_\alpha\left(f(a\tau b)-f(ab)\right)}{1+p_\alpha\left(f(a\tau b)-f(ab)\right)};\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{p_\alpha\left(g(a\tau b)-g(ab)\right)}{1+p_\alpha\left(g(a\tau b)-g(ab)\right)}\right)\right)<\varepsilon\right\}.$$

относительно плотно в *G*. Таким образом, все конечные пересечения множеств вида $U_{f,\alpha,\varepsilon}$ относительно плотны. Множества

$$B_{f,\varepsilon,\sigma,\Delta}=\left\{\tau\in G:\max_{\beta\in\Delta}\max_{\alpha\in\sigma}\sup_{a,b\in G}\frac{p_\beta\left[f_\alpha(a\tau b)-f_\alpha(ab)\right]}{1+p_\beta\left[f_\alpha(a\tau b)-f_\alpha(ab)\right]}<\varepsilon\right\}$$

$$=$$

$$B_{f,\varepsilon,\sigma,\delta}=\left\{\tau\in G:\max_{\alpha\in\sigma}\sup_{a,b\in G}\frac{p_\delta\left[f_\alpha(a\tau b)-f_\alpha(ab)\right]}{1+p_\delta\left[f_\alpha(a\tau b)-f_\alpha(ab)\right]}<\varepsilon\right\},$$

где $\sigma\subset A$, Δ –конечное подмножество множества натуральных чисел, δ – наибольшее число из конечного множества натуральных чисел Δ, $\max\limits_{\beta\in\Delta} p_\beta(y)=p_\delta(y)$, $y\in Y$, (тут использована монотонность полунорм), образуют базу окрестностей единицы слабейшей топологии группы G, в которой равномерно непрерывны все функции $f_n(t)$ $n=1,2,3,...$, $t\in G$. В этой топологии $\Im_U$ пополненная группа $\overline{G}$ компактна.

Если функция *g(t)* равномерно непрерывна на *G*, то ее можно непрерывно доопределить на $\overline{G}$. Тогда множество $\{g(axb)\}$ является компактом в Y и функция g – почти периодическая (см. следствие [5, стр. 456]), поэтому множество

$$B_{g,\alpha,\varepsilon}=\left\{\tau\in G:\sup_{a,b\in G}\frac{p_\alpha\left(g(a\tau b)-g(ab)\right)}{1+p_\alpha\left(g(a\tau b)-g(ab)\right)}<\varepsilon\right\}$$

относительно плотно.

Теорема 1. *Квазиравномерный предел по подпоследовательностям почти периодических функций* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *является почти периодической функцией* $f(t)$.

Доказательство. На группе *G* введем топологию $\Im_B$ при помощи множеств

$$B_{\varepsilon,\sigma,\beta}=\left\{\tau\in G:\max_{n\in\sigma}\sup_{a,b\in G}\frac{p_\beta\left[f_n(a\tau b)-f_n(ab)\right]}{1+p_\beta\left[f_n(a\tau b)-f_n(ab)\right]}<\varepsilon\right\},$$

где σ – конечное множество натуральных чисел, $\varepsilon>0$, $p_\beta(\ ),\beta=1,2,,3,...$ множество возрастающих полунорм на *Y,* задающих топологию пространства Фреше Y.

Предельная функция $f(t)$, согласно леммам 1 – 4, является непрерывной в топологии $\Im_B$, компактной (все п.п.ф. $f_n(t)$ – компактны) и равномерно непрерывной (все п.п.ф. $f_n(t)$ – равномерно непрерывны). Таким образом, $f(t)$ почти периодическая функция.

Теорема 2. *Последовательность* $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *из почти периодических функций поточечно сходится к пределу* $f_0(t)$. *Для того, чтобы сходимость была квазиравномерной по подпоследовательностям необходимо и достаточно, чтобы:*

а) предельная функция $f_0(t)$ *была почти периодической*

б) для любой последовательности $\{h'_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ *можно найти подпоследовательность* $\{h_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}\subset\{h'_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$, *для которой* $\lim\limits_n\lim\limits_\alpha f_n(th_\alpha)=\lim\limits_\alpha\lim\limits_n f_n(th_\alpha)$.

Доказательство. *Необходимость*: Если последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится квазиравномерно по последовательностям, то согласно теореме 1 предельная функция $f_0(t)$ является почти периодической. Если ввести на группе топологию $\Im_B$, то все функции $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ непрерывны в этой топологии. Они непрерывны и на пополненной компактной группе $\overline{G}$. Покажем, что поточечная сходимость последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f_0(t)$ имеет место на группе $\overline{G}$. Допустим, что для точки t_0 сходимость не имеет место, т.е. существует $\varepsilon_0>0$ и последовательность номеров $n_1,n_2,n_3,...$ таких, что:

$$\rho\left(f_{n_k}(t_0),f_0(t_0)\right)\geq\varepsilon_0,\quad k=1,2,3,....$$

Так как группа G плотна в $\overline{G}$, то для элемента t_0 существует последовательность элементов из G, для которой

$$\lim_\alpha t_\alpha=t_0,\ \ t_\alpha\in G,\ \alpha=1,2,3,...\ .$$

Последовательность функций $\{f_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ квазиравномерно сходится на G к $f_0(t)$. Согласно определению 2, по числу $\varepsilon_0/3$ и последовательности $\{t_\alpha\}$ находим индекс n_0 и подпоследовательность $\{\tau_\alpha\}\in\{t_\alpha\}$ со свойством

$$\rho\left(f_{n_0}(\tau_\alpha),f_0(\tau_\alpha)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad\forall\alpha\ .$$

Используя непрерывность функций $f_0(t)$ и $f_{n_0}(t)$ на группе $\overline{G}$, имеем:

$$\rho\left(f_{n_0}(\tau_\alpha),f_{n_0}(t_0)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad\forall\alpha>N,$$

$$\rho\left(f_0(\tau_\alpha),f_0(t_0)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad\forall\alpha>M.$$

Пусть $\alpha > \max(N, M)$, тогда для $n_0 \in \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$

$$\varepsilon_0 \le \rho\left(f_{n_0}(t_0), f_0(t_0)\right) \le \rho\left(f_{n_0}(t_0); f_{n_0}(\tau_\alpha)\right) + \rho\left(f_{n_0}(\tau_\alpha), f_0(\tau_\alpha)\right) + \rho\left(f_0(\tau_\alpha), f_0(t_0)\right) < \varepsilon_0 .$$

Полученное противоречие показывает, что поточечная сходимость имеет место на всей группе $\overline{G}$.

Пусть теперь задана произвольная последовательность $\{h'_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$. Так как группа $\overline{G}$ компактна, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{h_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty} \subset \{h'_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{\alpha} h_\alpha = h$. Согласно поточечной сходимости, имеем:

$$\lim_n f_n(th) = f_0(th), \ \lim_n f_n(th_\alpha) = f_0(th_\alpha)$$

или

$$\lim_n \lim_\alpha f_n(th_\alpha) = f_0(th) = \lim_\alpha f_0(th_\alpha) = \lim_\alpha \lim_n f_n(th_\alpha)$$

Необходимость доказана.

Достаточность: На группе G вводится топология $\Im_B$. Пополненная группа $\overline{G}$ является компактной топологической группой. Все функции $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ непрерывны на $\overline{G}$ в этой топологии. Из условия б) теоремы следует, что последовательность непрерывных функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно к непрерывной функции $f_0(t)$ на компактной группе $\overline{G}$. Пусть задана произвольная последовательность элементов $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ группы G. Из нее можно выбрать сходящуюся последовательность $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ к некоторому элементу $t_0 \in \overline{G}$. По заданному $\varepsilon > 0$ и номеру N, используя сходимость последовательности $\{f_n(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ к $f_0(t_0)$ (условие б) теоремы) и непрерывность функций $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, в топологии $\Im_B$ существует номер $n_0 > N$ и подпоследовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что:

$$\rho\left(f_0(t_0); f_{n_0}(t_0)\right) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\rho\left(f_0(t_0); f_0(\tau_n)\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\rho\left(f_{n_0}(t_0); f_{n_0}(\tau_n)\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда по неравенству треугольника для последовательности

$$\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{t'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$$

$$\rho\left(f_0(\tau_n); f_{n_0}(\tau_n)\right) < \rho\left(f_0(\tau_n); f_0(t_0)\right) + \rho\left(f_0(t_0); f_{n_0}(t_0)\right) + \rho\left(f_{n_0}(t_0); f_{n_0}(\tau_n)\right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Таким образом, показано, что выполнены условия определения 2 и последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится квазиравномерно к функции $f_0(t)$.

3.Выводы. Показано, что квазиравномерная сходимость не выводит из класса почти периодических функций. И обратно, если последовательность почти периодических функций сходится поточечно на группе $\overline{G}$ к почти периодической функции, то сходимость является квазиравномерной.

ЛИТЕРАТУРА

1 Arzela C. Intorno alla continuita della somma di infinita di funzioni continue. *Rend. R. Accad. Sci. Istit. Bologna*. – 1883/1884. – P. 79–84.

2. Arzela C. Sulle serie di funzioni. *Mem. R. Accad. Sci. Ist. Bologn*, serie 5 (8). – 1899/1900. – P. 131–186, 701–744.

3. Димитрова-Бурлаенко С.Д. Квазиравномерная сходимость и почти периодичность. *Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сб. тезисов докладов междунар. конф*. Харьков: "Апостроф". – 2012. – С.45.

4. Dimitrova-Burlayenko S.D. On Continuity Properties of Almost-Periodic Functions. *Euromech Colloq. 498, Conf. Proceedings*. – 2008. – P. 150–153.

5. Иосида К. *Функциональный анализ*. М.: Мир. – 1967. – 624 с.

6. Левитан Б.М. *Почти периодические функции*. – М.: Гостехиздат, 1953. – 397с.

7. Maak W. Eine neue Definition de fastperiodischen Funktionen. *Abhandlungen aus dem Math. Sem. Hamburg Univ*. –1938. –v.11. –P. 240.

8. Neumann J. von Almost periodic functions in a group, I. *Trans. Amer. Math Soc*. – 1934. – v. 36. – P. 445–492.