УДК 514

ПИРАМИДЫ И БИПИРАМИДЫ В E^n С ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ И ПРАВИЛЬНЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ В ОСНОВАНИИ

[1]Гурин А.М., [2]Петров Л.В., [2]Попов А.Н.

[1]Физико-технический институт низких температур НАН Украины, Харьков
[2]Харьковский Национальный университет, Украина

В E^n найден полный перечень выпуклых пирамид и бипирамид с правильными двумерными гранями и правильными многогранниками в основании.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пирамиды, бипирамиды, правильные многогранники.

ПІРАМІДИ І БІПІРАМІДИ В E^n З ПРАВИЛЬНИМИ ГРАНЯМИ І ПРАВИЛЬНИМИ БАГАТОГРАННИКАМИ В ОСНОВІ

Гурін О.М., Петров Л.В., Попов О.М.

В E^n знайдений повний перелік опуклих пірамід і біпірамід з правильними двовимірними гранями і правильними многогранниками в основі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: піраміди, біпіраміди, правильні багатогранники.

PYRAMIDS AND BIPYRAMIDS IN E^n WITH REGULAR FACES AND REGULAR POLYHEDRA AT THE BASE

Gurin A.M., Petrov L.V., Popov A.N.

In E^n a complete list of convex pyramids and bipyramids with regular two-dimensional faces and regular polyhedra at the base are found.

KEY WORDS: pyramids, bipyramids, regular polyhedra.

1. Введение. Многогранники с правильными двумерными гранями в евклидовом пространстве произвольной размерности E^n стали изучать сравнительно недавно, что следует, например, из обзоров [1–3]. Основой для перечисления таких многогранников являются правильные выпуклые многогранники в E^n [2] и выпуклые многогранники с правильными двумерными гранями в E^3 [4–7].

Цель данного исследования – найти полный перечень выпуклых пирамид и бипирамид с правильными двумерными гранями в E^n и правильными многогранниками в основании.

2. Метод теоретического рассмотрения состоит в нахождении развертки [8] искомого многогранника М (пирамид и бипирамид) с последующей проверкой развертки на возможность ее метрической реализации выпуклым многогранником с правильными двумерными гранями. Под разверткой здесь понимается набор многогранников, для которых указано правило подклеивания граней друг к другу. Развертка искомого многогранника М состоит из выпуклых многогранников, двумерные грани которых правильные. Для получения развертки той или иной пирамиды (или бипирамиды), достаточно расположить основание пирамиды (или бипирамиды) в гиперплоскости и соединить точку, принадлежащую прямой h (две точки прямой h для бипирамид), ортогональной основанию пирамиды (бипирамиды) и проходящей через ее центр, отрезками, равными ребрам основания, со всеми вершинами основания. Вершины основания равноудалены от своего центра, а значит, равноудалены и от каждой точки прямой h. Поэтому проверка развертки на реализуемость ее многогранником М заключается в проверке, что искомая вершина пирамиды (или бипирамиды) существует и расположена вне гиперплоскости основания. Искомая вершина существует, если существует действительное, отличное от нуля, решение уравнения, где в левой части – длина ребра основания, а в правой – длина бокового ребра пирамиды.

Полный перечень выпуклых правильных многогранников в E^n известен [2]. В E^3 их пять; в E^4 – шесть (с числом гиперграней соответственно: 5, 8, 16, 24, 120, 600); в E^n, где $n > 4$, в каждой размерности их три – симплекс, куб и кокуб.

3. Результат теоретического рассмотрения.

Теорема 1. *Если в E^4 основанием выпуклых пирамид или бипирамид с правильными двумерными гранями взяты правильные многогранники, то, за исключением додекаэдра, для каждого из них существует единственная пирамида и бипирамида, у которой все двумерные грани суть правильные многоугольники.*

Доказательство. Предположим, что пирамиды в E^4 могут иметь основанием каждый из пяти правильных многогранников пространства E^3. Найдем развертки искомых многогранников, для чего выполним формальные комбинаторные построения, соединив вершины основания пирамид с предполагаемыми искомыми вершинами пирамид или бипирамид. Получим трехмерные пирамиды над гранями оснований. По условию теоремы у найденных пирамид все грани правильные. Условие выпуклости разверток выполняется, если суммы двугранных углов, инцидентных каждому ребру меньше 360^0. Величины двугранных углов всех выпуклых многогранников с правильными гранями указаны, например, в [4]. Условие выпуклости выполняется для всех искомых пирамид и бипирамид, кроме додекаэдра. Действительно, только пирамиды над гранями додекаэдра имеют двугранные углы большие 120^0. Каждому ребру пирамиды инцидентно три таких угла, что дает сумму большую 360^0, что исключено для выпуклых многогранников. Единственность многогранников следует из теоремы Коши [8]. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 . *Если в n-мерном евклидовом пространстве, где $n > 4$, основанием пирамид или бипирамид с правильными двумерными гранями взяты правильные n-мерные многогранники, то только для симплекса и кокуба в каждой размерности существует и единственная пирамида и бипирамида, у которой все двумерные грани суть правильные многоугольники.*

Доказательство. Пирамиды над правильными симплексами, 5-гранниками, дают в свою очередь правильные симплексы в старшей размерности [2, 3]. Бипирамиды над симплексами найдены в [1].

4. Пирамиды и бипирамиды в E^5 . Рассмотрим 4-х мерный куб – 8-гранник, с координатами вершин (± 1; ± 1; ± 1; ± 1; 0). Ребро куба равно 2. Так как центр 4-х мерного куба лежит в начале координат, то вершина пятимерной пирамиды будет иметь координату (0; 0; 0; 0; x). Расстояние от вершины куба с координатами (1; 1; 1; 1; 0) до вершины искомой пирамиды (0; 0; 0; 0; x) суть:

$$L = \sqrt{1+1+1+1+x^2} = 2,$$

откуда получаем $x = 0$.

Координаты вершины пирамиды (0; 0; 0; 0; 0). Следовательно, вершина пирамиды совпадает с центром куба. Пирамида вырожденная, расположена в четырехмерном пространстве и разбивает куб основания на пирамиды.

Рассмотрим 16-гранник или кокуб, состоящий из 16 тетраэдров с координатами вершин (± 1; 0; 0; 0; 0), (0; ± 1; 0; 0; 0), (0; 0; ± 1; 0; 0), (0; 0; 0; ± 1; 0) и длиной ребра равной $\sqrt{2}$. Его центр расположен в начале координат. Для вершины пятимерной пирамиды имеем координаты (0; 0; 0; 0; x). Для произвольной вершины основания, например, (1; 0; 0; 0; 0), должно выполняться равенство:

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2},$$

откуда $x \pm 1$. Таким образом, пирамида и бипирамиды существуют.

Рассмотрим 24-гранник – полиоктаэдр, состоящий из 24 октаэдров с координатами вершин (± 1; ± 1; 0; 0; 0), (± 1; 0; ± 1; 0; 0), (± 1; 0; 0; ± 1; 0) (0; ± 1; ± 1; 0; 0), (0; ± 1; 0; ± 1; 0), (0; 0; ± 1; ± 1; 0). Центр его находится в начале координат и длина ребра равна $\sqrt{2}$. Координаты вершины искомой пирамиды (0;0;0;0; x). Для произвольной вершины основания, например, для вершины с координатами (1;1;0;0;0), расстояние до вершины пирамиды суть

$$\sqrt{1+1+x^2} = \sqrt{2},$$

откуда $x = 0$. Искомая вершина расположена в плоскости основания и разбивает основание на пирамиды. Таким образом, искомых пирамиды и бипирамиды не существует.

Рассмотрим 120-гранник – полидодекаэдр, состоящий из 120 додекаэдров. Координаты вершин 120-гранника, центр которого расположен в начале координат, можно найти в [2, 3]. Они записываются как перестановки координат точек (± 2; ± 2; 0; 0), ($\sqrt{5}$; ± 1 ± 1; ± 1), ($\pm\phi^2$; $\pm\phi$; $\pm\phi$; $\pm\phi$), ($\pm\phi^2$; $\pm\phi^{-1}$; $\pm\phi^{-1}$; $\pm\phi^{-1}$), ($\pm\phi^2$; $\pm\phi^{-2}$; ± 1; 0), ($\pm\sqrt{5}$; $\pm\phi^{-1}$; $\pm\phi$; 0), (± 2; ± 1; $\pm\phi$; $\pm\phi^{-1}$),

где $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, а длина ребра равна $3-\sqrt{5}$.

Расстояние от вершины пирамиды (0;0;0;0; x) до вершины основания (2;2;0;0;0) суть:

$$\sqrt{4+4+x^2} = 3 - \sqrt{5},$$

откуда получаем $x^2 = -6\sqrt{5} + 6$. Отсутствие действительных решений указывает на отсутствие искомой вершины, что, в свою очередь, указывает на нарушение выпуклости развертки при предположении, что все двумерные грани – суть правильные многоугольники. Следовательно, не существует пирамиды и бипирамиды с основанием 120-гранника.

Рассмотрим 600-гранник – политетраэдр, состоящий из 600 тетраэдров. Координаты вершин 600-гранника записываются как перестановки чисел координат вершин ($\pm\phi$; ± 1; $\pm\phi^{-1}$; 0), (± 2; 0; 0; 0), (± 1; ± 1; ± 1; ± 1) [2, 3]. Центр политетраэдра расположен в начале координат, длина ребра равна $\sqrt{5} - 1$.

Расстояние от вершины основания (2;0;0;0;0) до вершины пирамиды (0;0;0;0; x) суть:

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{5} - 1,$$

откуда $x^2 = 2 - 2\sqrt{5}$, что невозможно. Следовательно, развертка невыпуклая, пирамиды и бипирамиды с основанием 600-гранника не существует.

5. Пирамиды и бипирамиды в E^n, где n > 5. Для каждого n в евклидовом пространстве размерности >4 существует всего по 3 правильных многогранника: n-мерный симплекс , n-мерный куб и n-мерный кокуб. Пирамида с правильными двумерными гранями, построенная на n-мерном симплексе суть (n + 1)-мерный симплекс.

Рассмотрим n-мерный куб с координатами вершин $(\pm 1;\ \pm 1 \ldots \pm 1;)$, центром в начале координат и длиной ребра 2. Вершина (n + 1)-мерной пирамиды имеет координаты (0; 0; 0;…0; x). Найдём x из условия, что вершина пирамиды равноудалена на длину ребра от вершин основания. Получаем равенство:

$$\sqrt{n+x^2} = 2,$$

откуда $x = 2 - \sqrt{n}$, где $n > 4$. Следовательно, не существует такого действительного x, чтобы полученное равенство выполнялось, а значит, не существует вершины (n+1)-мерной пирамиды, у которой в основании находится n-мерный куб.

Рассмотрим n-мерный кокуб, координаты вершин которого $(\pm 1;\ 0;\ 0;\ldots 0;\ 0)$, $(0;\ \pm 1;\ 0;\ldots 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 0;\ldots \pm 1;\ 0)$. Центр расположен в начале координат, а длина ребра равна $\sqrt{2}$. Найдем расстояние от вершины (n+1)-мерной пирамиды (0; 0; 0; …0; x) до вершины основания (1; 0; 0;…0; 0). Получаем равенство:

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2},$$

откуда $x = \pm 1$. Следовательно, пирамиды и бипирамиды с основанием n-мерного кокуба существуют.

Единственность найденных многогранников следует из теоремы Коши [8]. Теорема 2 доказана.

6. Заключение. Перечень пирамид в E^n с правильными двумерными гранями шире, чем приведено в статье, так как существуют пирамиды, все двумерные грани которых правильные, а основаниями могут быть многогранники отличные от правильных многогранников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gosset T. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions. *Messenger of Mathematics*. – 1900. – v.29. – P. 43–48.
2. Coxeter H.S.M. Regular Polytopes. – Dover, New York. 1973. – 354 p.
3. Coxeter H.S.M., et al. Uniform Polyhedra. *Phil. Trans*. – 1954. – v. 246A . – P.401–450.
4. Johnson N.W. Convex polyhedra with regular faces. *Can. J.Math*. –1966. – v.18, N1, – P.169–200.
5. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ*. – 1967. – С. 1–220.
6. Гурин А.М., Залгаллер В.А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных. *Труды Санкт-Петербургского математического общества*. – 2008. – Т. 14. – С.215–292.
7. Тимофеенко А.В. Выпуклые правильногранники, не рассекаемые никакой плоскостью на правильногранные части. *Матем. труды*. –2008. – т. 11, вып.1. – С.132–152.
8. Александров А.Д. *Выпуклые многогранники. Избранные труды, т. 2*, Новосибирск, Наука. – 2007. – 576 с.