

УДК 517.5; 519.6

**КВАДРАТУРНЫЕ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОЛИНОМАХ ЧЕБИШЕВА***Грибкова В.П., Козлов С.М.*

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

В работе предлагаются два новых метода вычисления определенных интегралов. Один из них основан на использовании полиномов Чебышева первого рода для приближения подынтегральной функции; в этом случае получаются формулы замкнутого типа, второй – на использовании полиномов Чебышева второго рода, получаются формулы открытого типа. В каждом случае подынтегральная функция раскладывается в ряд Фурье – Чебышева по соответствующим полиномам, при этом коэффициентами разложения являются линейные функционалы  $L_n^f$  в первом случае и  $M_n^f$  – во втором, а координатными функциями будут линейные комбинации полиномов. Линейные функционалы удовлетворяют условию  $L_n^f \leq E_n^f$ ,  $M_n^f \leq E_n^f$  и отражают дифференциальные свойства функции. За счет быстрого убывания линейных функционалов ряды абсолютно и равномерно сходятся в первом случае для функций, принадлежащих классу  $Lip\alpha$ , во втором случае – для функций, вторая производная которых принадлежит классу  $Lip\alpha$ . Формулы для вычисления двойных интегралов, доказательство сходимости и оценка погрешности основаны на использовании результатов для вычисления однократных интегралов. Приведены примеры вычислений для конкретных задач.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** определенный интеграл, квадратурные и кубатурные формулы, полиномы Чебышева.

**КВАДРАТУРНІ І КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ, ЗАСНОВАНІ НА ПОЛІНОМАХ ЧЕБИШЕВА***Грибкова В.П., Козлов С.М.*

В роботі пропонуються два нових методи обчислення визначених інтегралів. Один з них заснований на використанні поліномів Чебишева першого роду для наближення підінтегральної функції; в цьому випадку отримаємо формули замкнутого типу, другий – на використанні поліномів Чебишева другого роду, отримаємо формули відкритого типу. В кожному разі підінтегральна функція розкладається в ряд Фур'є – Чебишева за відповідними поліномами, при цьому коефіцієнтами розкладання є лінійні функціонали  $L_n^f$  в першому випадку і  $M_n^f$  – у другому, а координатними функціями будуть лінійні комбінації поліномів. Лінійні функціонали задовольняють умові  $L_n^f \leq E_n^f$ ,  $M_n^f \leq E_n^f$ , і відображають диференціальні властивості функції. За рахунок швидкого убывання лінійних функціоналів ряди абсолютно і рівномірно сходятся в першому випадку для функцій, що належать класу  $Lip\alpha$ , у другому випадку – для функцій, друга похідна яких належить класу  $Lip\alpha$ . Формули для обчислення подвійних інтегралів, доказ збіжності та оцінка похибки засновані на використанні результатів для обчислення одноразових інтегралів. Наведені приклади обчислень для конкретних задач.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** визначений інтеграл, квадратурні і кубатурні формули, поліноми Чебишева.

**QUADRATURE AND CUBATURE FORMULAS BASED ON CHEBYSHEV POLYNOMIALS***Gribkova V.P., Kozlov S.M.*

The paper proposes two new methods of calculating definite integrals. One of them is based on the use of Chebyshev polynomials of the first kind for the approximation of the integrand, in this case we obtain the formulas of the closed type; the second – on the use of Chebyshev polynomials of the second kind, we obtain the open type formulas. In each case, the integrand is expanded in a Fourier–Chebyshev series of correspondent polynomials. Then the expansion coefficients are linear functionals  $L_n^f$  in the first case and  $M_n^f$  – in the second case, and coordinate functions are linear combinations of the polynomials. Linear functionals satisfy the condition  $L_n^f \leq E_n^f$ ,  $M_n^f \leq E_n^f$ , and reflect the differential properties of the function. Due to the rapid decay of linear functionals the series converge absolutely and uniformly in the first case for the functions belonging to the class  $Lip\alpha$ , in the second case – for the functions, which second derivative belongs to the class  $Lip\alpha$ . Formulas for calculating the double integrals, the proof of convergence and error estimation are based on the results for the calculation of single integrals. The examples of calculations for specific tasks are given.

**KEY WORDS:** the definite integral, quadrature and cubature formulas, Chebyshev polynomials.

**1. Введение.** В работах [1]–[5] рассматриваются хорошо изученные методы вычисления интегралов. Наиболее популярными методами являются методы квадратур, как для однократных, так и двойных интегралов. При этом при вычислении двойных интегралов применяются квадратуры по обоим переменным и, вследствие этого, возникают трудности с выбором сетки узлов, в которых вычисляется подынтегральная функция, особенно, если граница области  $D$  является криволинейной. Необходимо выбирать определенную сетку таким образом, чтобы её узлы попадали на граничную кривую, иначе будет допущена большая погрешность. Это достигается уменьшением шага сетки, но при этом существенно увеличивается количество точек внутри области, а соответственно и количество вычислений подынтегральной функции и всех вычислительных операций, что является нецелесообразным. Применяемые различные методы интерполирования связаны не только с большим количеством взаимосвязанных точек внутри области, но и с вычислением производных высокого порядка при оценке погрешности. Одним из популярных методов вычисления однократных и двойных интегралов является метод Монте-Карло. Он обходит трудности с выбором общей сетки для всей области двойных интегралов, так как основан на вероятностном выборе узлов для вычисления подынтегральной функции. Но в этом случае, опять возникают трудности с аппроксимацией границы и затруднена оценка погрешности полученного приближенного значения.

В данной работе предлагается решение задач о вычислении однократных и двойных интегралов приближенными методами, основанными на полиномах Чебышева первого и второго рода. Для вычисления применяются асимптотические многочлены  $Q_n^f(x)$ , основанные на полиномах Чебышева первого рода, и  $G_n^f(x)$ , основанные на полиномах Чебышева второго рода. Асимптотическими они называются потому, что при  $n \rightarrow \infty$  асимптотически стремятся к полиномам наилучшего равномерного приближения [6] и [7]. На рассматриваемых многочленах строятся удобные квадратурные и кубатурные формулы. Для вычисления соответствующих интегралов подынтегральная функция всегда может быть разложена в бесконечный равномерно сходящийся ряд Фурье–Чебышева, скорость сходимости которого зависит от дифференциальных свойств подынтегральной функции. Кроме того, не возникает трудностей с аппроксимацией границы области. Использование предлагаемых формул позволяет построить эффективные алгоритмы для вычисления, как однократных, так и двойных интегралов. В отличие от методов, рассмотренных в вышеуказанных работах, наряду с приближенным значением можно вычислять и допускаемую погрешность с помощью

последовательности линейных функционалов, не прибегая к вычислению и оценке производных высокого порядка от подынтегральной функции.

**2. Квадратурные формулы, основанные на многочленах  $Q_n^f(x)$ .** Пусть необходимо вычислить определенный интеграл

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx. \quad (1.1)$$

Промежуток интегрирования с помощью линейного преобразования всегда может быть приведён к промежутку  $[a, b]$ .

Аппроксимируем асимптотическим многочленом  $Q_n^f(x)$  подынтегральную функцию (1.1), который представим через полиномы Чебышева первого рода  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $x \in [-1; 1]$

$$f(x) \approx Q_n^f(x),$$

$$Q_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k+1} f(x_k) \frac{T_n(x) - x_k T_{n+1}(x)}{x - x_k}. \quad (1.2)$$

В работах [7] и [8] рассматриваются обозначения:

$$\pi_k^{(n)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{T_n(x) - x_k T_{n+1}(x)}{(n+1)(x - x_k)},$$

используя которые, многочлен  $Q_n^f(x)$  можно записать в виде:

$$Q_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} f(x_k) \pi_k^{(n)}(x).$$

В работе [7] впервые рассмотрены следующие квадратурные формулы, которые являются формулами замкнутого типа:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = r_n + \frac{1}{r+1} \left( \frac{f_0 + f_{n+1}}{1 + 2 \left[ \frac{n}{2} \right]} + 2 \sum_{m=1}^n f_m \left( 1 - 2 \sum_{S=1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} \frac{T_{2S}(x_m)}{4S^2 - 1} \right) \right), \quad (1.3)$$

или можно записать равенство

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} Q_n^f(x) dx + \int_{-1}^{+1} \sum_{s=n}^{\infty} L_s^f \psi_{s+1}^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^{+1} Q_n^f(x) dx + r_n, \quad (1.4)$$

где  $f_m = f(x_m)$ , а  $r_n$  – остаточный член, который равен:

$$r_n = \int_{-1}^{+1} \sum_{s=n}^{\infty} L_s^f \psi_{s+1}^{(n)}(x) dx = \sum_{s=n}^{\infty} L_s^f b_{s+1}, \quad (1.5)$$

при этом, коэффициенты  $b_{s+1}$  определяются через базисные функции  $\psi_{s+1}^{(n)}(x)$

$$b_{s+1} = \int_{-1}^{+1} \psi_{s+1}^{(n)}(x) dx = \bar{\psi}_{s+1}^{(n)} = \sum_{p_i \geq n+1} \mu(2\lambda_i + 1) c_{p_i},$$

$$c_{p_i} = \begin{cases} 0, & \text{при нечётном } p_i; \\ -\frac{2}{p_i^2 - 1}, & \text{при чётном } p_i = (2m + 1)(n + 1); \\ 2\left(\frac{1}{q^2 - 1} - \frac{1}{p_i^2 - 1}\right), & \text{при чётном} \\ & p_i = 2m(n + 1) + q, 0 \leq |q| \leq n; \end{cases} \quad (1.6)$$

Линейные функционалы имеют вид

$$L_s^f = \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^{s+1} \|(-1)^m f(x_m), \quad \ll \| \text{ — означает, что}$$

нулевой и  $(n + 1)$  слагаемые делятся на 2.

Сходимость ряда (1.4) для всех  $f(x)$ , принадлежащих классу  $Lip \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , доказана в [7].

Наряду с квадратурными формулами (1.3), (1.4) удобно использовать формулу, в которой многочлен  $Q_n^f(x)$  имеет нулевую степень. Тогда получается квадратурная формула следующего вида:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} Q_0^f dx + \sum_{s=0}^{\infty} L_s^f \int_{-1}^{+1} \psi_{s+1}^{(0)}(x) dx$$

или

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = f(+1) + f(-1) + \sum_{s=0}^{\infty} L_s^f \bar{\psi}_{s+1}^{(0)} \quad (1.7)$$

где  $\bar{\psi}_{s+1}^{(0)} = \int_{-1}^{+1} \psi_{s+1}^{(0)}(x) dx$ .

Учитывая выражения для функций  $\psi_{s+1}^{(n)}(x)$ , формулы (1.6), можно вычислить значения  $\bar{\psi}_{s+1}^{(0)}$ , которые будут оставаться неизменными для любых подынтегральных функций. Эти значения приведены в таблице 1 до  $n = 30$ , с учётом того, что для нечётных  $s + 1$  значения  $\bar{\psi}_{s+1}^{(0)} = 0$ .

Следовательно, квадратурная формула имеет вид:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = f(1) + f(-1) - \frac{8}{3} L_1^f - \frac{32}{15} L_3^f + \frac{64}{105} L_5^f - \dots \quad (1.8)$$

Ряд (1.7) является знакопеременным, но не знакочередующимся, поэтому при оценке отбрасываемой суммы следует ориентироваться не только на первое слагаемое, но, по крайней мере, на два следующих друг за другом.

Формула (1.8) может быть легко обобщена на промежуток  $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx; \quad a \leq t \leq b,$$

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, \quad x \in [-1; 1].$$

Скорость сходимости ряда (1.7) зависит от структурных свойств подынтегральной функции. С помощью формулы (1.8) были вычислены интегралы над некоторыми функциями. Результаты приведены в таблице 2.

На конкретном примере можно рассмотреть скорость убывания членов квадратурной формулы для интеграла  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ , вычисленного с точностью

$\varepsilon = 10^{-6}$ . Так как линейные функционалы имеют следующие значения:

$$L_1^f = -0,24256 \cdot 10^{-1}, \quad L_3^f = -0,10678 \cdot 10^{-2},$$

$$L_5^f = -0,37998 \cdot 10^{-4}, \quad L_7^f = -0,12442 \cdot 10^{-5},$$

Таблица 1.

$s + 1$	$\psi_{s+1}^{(0)}(x)$	$\bar{\psi}_{s+1}^{(0)}$
2	$T_2(x) - T_0$	$-\frac{8}{3}$
4	$T_4(x) - T_0$	$-\frac{32}{15}$
6	$T_6(x) - T_2(x)$	$\frac{64}{105}$
8	$T_8(x) - T_0$	$-\frac{128}{63}$
10	$T_{10}(x) - T_2(x)$	$\frac{64}{99}$
12	$T_{12}(x) - T_4(x)$	$\frac{256}{2145}$
14	$T_{14}(x) - T_2(x)$	$\frac{128}{195}$
16	$T_{16}(x) - T_0$	$-\frac{515}{255}$
18	$T_{18}(x) - T_6(x)$	$\frac{576}{11305}$
20	$T_{20}(x) - T_4(x)$	$\frac{256}{1995}$
22	$T_{22}(x) - T_2(x)$	$\frac{320}{483}$
24	$T_{24}(x) - T_8(x)$	$\frac{1024}{36225}$
26	$T_{26}(x) - T_2(x)$	$\frac{448}{675}$
28	$T_{28}(x) - T_4(x)$	$\frac{512}{3915}$
30	$T_{30}(x) - T_{10}(x) - T_6(x) + T_2(x)$	$-\frac{27136}{48895}$

Таблица 2.

$I = \int_a^b f(x)dx$	$\int_{-1}^{+1} e^x dx$	$\int_{-1}^{+1} e^x \sqrt{1+4e^x} dx$	$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$
Точное значение	0,2350402	0,6171038	0,2402265
Приближенное значение	0,2350401	0,6171037	0,2402262
Заданная точность	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
Величина погрешности	$-0,667 \cdot 10^{-6}$	$0,771 \cdot 10^{-6}$	$-0,116 \cdot 10^{-6}$
Номер функционала, при котором достигнута точность	5	5	7

то после их умножения на соответствующие величины  $\psi_{s+1}^{-(0)}$ , приближенное значение интеграла формируется следующим образом:

$$I \approx Q_0^f + 0,00646821 + 0,00022781 - 0,0000237 + 0,0000025 = 0,2402262.$$

В таблице 2 указаны номера членов  $s$ , при которых достигнута заданная точность. При этом следует иметь в виду, что при всех четных номерах  $s$ , значения  $\psi_{s+1}^{-(0)}$  равны нулю.

**2. Квадратурные формулы, основанные на многочленах  $G_n^f(x)$ .** По-прежнему решается задача (1.1). Подынтегральная функция  $f(x)$  аппроксимируется с помощью многочлена  $G_n^f(x)$

$$f(x) \approx G_n^f(x). \quad (2.1)$$

Тогда интеграл можно представить в виде:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_{-1}^{+1} G_n^f(x)dx + \int_{-1}^{+1} \sum_{s=n}^{\infty} M_s^f \chi_{s+2}^{(n)}(x)dx = \int_{-1}^{+1} G_n^f(x)dx + r_n. \quad (2.2)$$

Многочлен  $G_n^f(x)$  имеет вид:

$$G_n^f(x) = \sum_{k=1}^{n+2} f_k(1-x_k^2)g_k^{(n)}(x),$$

а функции  $g_k^{(n)}(x)$  будут равны:

$$g_k^{(n)}(x) = \frac{2}{n+3} \sum_{m=0}^n U_m(x_k)U_m(x). \quad (2.3)$$

Полиномы Чебышева второго рода имеют вид  $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Интегрирование многочленов Чебышева  $U_m(x)$  приводит к значениям

$$\int_{-1}^{+1} U_m(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{m+1}, & \text{при } m - \text{чётном,} \\ 0, & \text{при } m - \text{нечётном.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Тогда квадратурные формулы, основанные на многочленах  $G_n^f(x)$ , будут

$$\int_{-1}^{+1} G_n^f(x)dx = \frac{2}{n+3} \sum_{k=1}^{n+2} f(x_k)(1-x_k^2) \sum_{m=0}^n \frac{2U_m(x_k)}{m+1}. \quad (2.5)$$

Интегрирование остаточного члена приводит к выражению

$$r_n = \int_{-1}^{+1} \sum_{s=n}^{\infty} M_s^f \chi_{s+2}^{(n)}(x)dx = \sum_{s=n}^{\infty} M_s^f \int_{-1}^{+1} \chi_{s+2}^{(n)}(x)dx = \sum_{s=n}^{\infty} M_s^f \psi_{s+2}^{-(n)}, \quad (2.6)$$

где линейные функционалы

$$M_n^f = \frac{2}{n+3} \sum_{m=1}^{n+2} (-1)^m f(x_m)(1-x_m^2),$$

а базисные функции  $\chi_{s+2}^{(n)}(x)$  определяют коэффициенты

$$\psi_{s+2}^{-(n)} = \int_{-1}^{+1} \chi_{s+2}^{(n)}(x)dx.$$

В данном случае так же, как и в предшествующем пункте 1, удобно подынтегральную функцию  $f(x)$  разложить в ряд

по функционалам  $\{M_n^f\}$  при  $n=0$  и этот ряд проинтегрировать. В результате получается представление интеграла в виде бесконечного ряда

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = f(1/2) + f(-1/2) + \sum_{s=0(2)}^{\infty} M_s^f \psi_{s+2}^{-(0)}. \quad (2.7)$$

В этом случае символ  $0(2)$  означает, что отличны от нуля члены с четными номерами  $s$ , то есть,  $s = 0, 2, 4, 6, \dots$ .

Коэффициенты, которые получаются при интегрировании, приведены в таблице 3.

Формулы (2.5) являются формулами открытого типа, так как точки  $x_1$  и  $x_{n+2}$  не совпадают с концами промежутка интегрирования. Формула (2.7) является также формулой открытого типа. Пользуясь этой формулой, можно вычислить значения интеграла с заданной точностью  $\varepsilon$ , последовательно прибавляя члены ряда, до тех пор, пока сумма абсолютных величин, например двух последовательных слагаемых, не станет меньше  $\varepsilon$ .

Сходимость ряда (2.7) доказана в [7] для всех  $f(x)$ , если  $f''(x) \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

По формуле (2.7) вычислены интегралы, приведенные в таблице 4.

В таблице 4 указаны номера  $s$  последних членов ряда с учетом того, что ряд (2.7) состоит

только из четных слагаемых, все нечетные равны нулю.

Формулу (2.2) удобно применять для приближенного вычисления некоторых сингулярных интегралов.

Таблица 3.

№	$\chi_{S+2}^{(0)}(\cos \theta)$	$-\chi_{S+2}^{(0)}$
2	$\chi_2^{(0)}(\cos \theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}$	-2/3
4	$\chi_4^{(0)}(\cos \theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} - 1$	-3,066667
6	$\chi_6^{(0)}(\cos \theta) = \chi_4^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 6\theta}{\sin \theta} + 1$	-1,352381
8	$\chi_8^{(0)}(\cos \theta) = \chi_6^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 8\theta}{\sin \theta}$	-1,574602
10	$\chi_{10}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_8^{(0)}(\cos \theta) - \chi_2^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 10\theta}{\sin \theta} - 1$	-3,089753
12	$\chi_{12}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_{10}^{(0)}(\cos \theta) + \chi_2^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 12\theta}{\sin \theta} + 1$	-1,910265
14	$\chi_{14}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_{12}^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 14\theta}{\sin \theta}$	-2,043598
16	$\chi_{16}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_{14}^{(0)}(\cos \theta) - \chi_4^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 16\theta}{\sin \theta} - 1$	-3,494577
18	$\chi_{18}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_{16}^{(0)}(\cos \theta) + \chi_4^{(0)}(\cos \theta) - \chi_2^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 18\theta}{\sin \theta} + 1$	-1,599840
20	$\chi_{20}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_{18}^{(0)}(\cos \theta) + \chi_2^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 20\theta}{\sin \theta}$	1,371588
22	$\chi_{22}^{(0)}(\cos \theta) = \chi_{20}^{(0)}(\cos \theta) + \frac{\sin 22\theta}{\sin \theta} - 1$	-2,429654

Таблица 4.

$I = \int_a^b f(x) dx$	$\int_{-1}^{+1} e^x dx$	$\int_{-1}^{+1} e^x \sqrt{1+4e^x} dx$	$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$
Точное решение	0,2350402	0,617038	0,24022 65
Приближенное решение	0,2350398	0,617033	0,24022 61
Заданная точность $\varepsilon$	$10^{-6}$	$0,25 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$
Номер функционала, при котором точность достигнута	8	4	6

**3. Приближённое вычисление двойных интегралов с помощью многочленов  $Q_0(x)$ .** Пусть необходимо вычислить двойной интеграл по области  $D$  с гладкой границей

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (3.1)$$

Такие интегралы не всегда могут быть вычислены с помощью элементарных функций. Существующие приближенные методы вычисления – кубатурные формулы [3], основанные на том, что область  $D$  покрывается сеткой, в узлах сетки вычисляются значения функции  $f(x_i, y_j)$

( $i = \overline{0, n}$ ;  $j = \overline{0, m}$ ) и производится их суммирование по определённым правилам. При этом возникают следующие трудности: 1) выбор сетки; 2) аппроксимация границы области, если область не прямоугольная; 3) оценка точности вычислений.

Для вычисления интеграла (3.1) может быть применён следующий метод.

Двойной интеграл по области  $D$  с криволинейной границей (рис.1), где  $x \in [a, b]$ , а  $y$

изменяется от кривой  $c(x)$  до кривой  $d(x)$ , может быть представлен в виде:

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy. \quad (3.2)$$

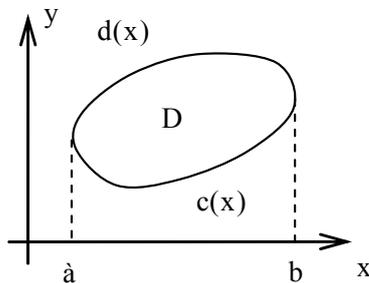


Рис.1.

Для вычисления двойного интеграла (3.2) внутренний интеграл, вычисляемый по переменной  $y$ , заменяется по принципу, указанному в пункте 1 (формула (1.7))

$$\int_{\bar{y}(x)}^{d(x)} f(x,y) dy = \frac{d(x)-c(x)}{2} \left( Q_0^f(x) + \sum_{s=0}^{\infty} L_s^f(x) \bar{\psi}_{s+1}^{(0)} \right), \quad (3.3)$$

где

$$Q_0^f(x) = f(x, d(x)) + f(x, c(x)),$$

$$L_s^f(x) = \frac{1}{s+1} \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^i f(x, \bar{y}_i), \quad (3.4)$$

$$\bar{y}_i = \frac{d(x)-c(x)}{2} y_i + \frac{d(x)+c(x)}{2}, \quad i = \overline{0, n+1},$$

$$y_i = \cos \frac{i\pi}{s+1}, \quad \bar{\psi}_{s+1}^{(0)} = \int_{-1}^{+1} \psi_{s+1}^{(0)}(y) dy.$$

В выражении (3.3) функции  $Q_0^f(x)$  и  $L_s^f(x)$  зависят от  $x$ , поэтому можно ввести обозначение

$$F(x) = \frac{d(x)-c(x)}{2} \left( Q_0^f(x) + \sum_{s=0}^{\infty} L_s^f(x) \bar{\psi}_{s+1}^{(0)} \right), \quad (3.5)$$

тогда получается определённый интеграл

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \frac{d(x)-c(x)}{2} \left( Q_0^f(x) + \sum_{s=0}^{\infty} L_s^f(x) \bar{\psi}_{s+1}^{(0)} \right) dx, \quad (3.6)$$

к которому применяется ещё раз тот же принцип интегрирования, но уже по переменной  $x$ .

В результате интеграл вычисляется следующим образом:

$$I^Q = \frac{b-a}{2} \left( Q_0^F + \sum_{r=0}^{\infty} L_r^F \bar{\Psi}_{r+1}^{(0)} \right), \quad (3.7)$$

где

$$Q_0^F = F(b) + F(a), \quad (3.8)$$

$$L_r^F = \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j F(\bar{x}_j), \quad (3.9)$$

$$\bar{\Psi}_{r+1}^{(0)} = \int_{-1}^{+1} \psi_{r+1}^{(0)}(x) dx, \quad (3.10)$$

$$\bar{x}_j = \frac{b-a}{2} \cos \frac{j\pi}{r+1} + \frac{b+a}{2}, \quad j = \overline{0, r+1}. \quad (3.11)$$

Вычисление интеграла (3.1) производится с заданной точностью  $\varepsilon$ . Для этого вычисление функции  $F(x)$  нужно производить с точностью  $\varepsilon_1$  на порядок более высокой, чем заданное значение  $\varepsilon$ .

Таким образом, при использовании алгоритма (3.3)–(3.11) нет необходимости заранее покрывать область определённой сеткой. В процессе вычисления значений функции  $F(x_j)$ , в зависимости от заданной точности  $\varepsilon_1$ , выбирается необходимое число членов суммы в формуле (3.3), причем в разных сечениях может использоваться разное число линейных функционалов.

Для того чтобы рассмотренный метод вычисления двойного интеграла сходил к точному значению, требуется выполнение условий, указанных в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Значение  $I^Q$  (3.7) при  $r \rightarrow \infty$  стремится к значению интеграла (3.1) для всех функций  $f(x, y)$ , которые удовлетворяют условию  $Lip \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) по обеим переменным в области  $D$ , ограниченной гладкой кривой (если граница области имеет точки излома, то следует область разбить на такие подобласти, чтобы удовлетворялись условия теоремы относительно границы).*

**Доказательство.** В выражении (3.3), если  $f(x, y)$  по переменной  $y$  принадлежит классу  $Lip \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), то при всяком  $x$  имеет место сходимость разложения по функционалам  $L_s^f(x)$  к подынтегральной функции и, следовательно, сходимость суммы (3.5) к интегралу (3.3) при  $s \rightarrow \infty$  на основании рассмотренного в пункте 1.

Аналогичным образом для функции  $F(x)$  имеет место следующее утверждение. Если функция  $F(x)$  принадлежит классу  $Lip \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), то справедливо представление интеграла  $I$  – (3.1) в виде (3.7) и разложение по функционалам  $L_r^F$ . При  $r \rightarrow \infty$  сумма (3.7) стремится к интегралу на том же основании, что и в предшествующем случае. Теорема доказана.

Рассмотренный алгоритм был реализован на примерах, показанных в таблице 5.

Следует учесть, что в выражениях (3.3) и (3.7) используются только нечётные слагаемые, так как интегралы над функциями  $\psi_{n+1}^{(0)}$  при  $n$  чётных обращаются в нуль. В таблице 5 в последнем столбце указаны номера последних нечётных функционалов, используемых для вычисления интеграла с заданной точностью  $\varepsilon$ . Величина  $\varepsilon^*$  представляет собой величину первого из

отброшенных членов суммы (3.7). В программе вычислений было предусмотрено, если подынтегральная функция такова, что последовательности её линейных функционалов  $\{L_S^f(x)\}$  и  $\{L_T^F\}$  убывают медленно, то в качестве  $\varepsilon^*$  можно брать сумму двух или трёх последовательных слагаемых и заканчивать счёт при выполнении условия  $\varepsilon < \varepsilon^*$ .

При сравнении этого метода вычисления двойных интегралов с существующими приближёнными методами вычисления задачи (3.1) следует отметить некоторые особенности:

1. Метод обеспечивает минимальное количество вычислений при подсчёте значений  $F(x_j)$ , так как значения  $y_i$  не объединены общей сеткой по всей области и скорость сходимости суммы в выражении (3.3) зависит только от свойств

функции в сечении  $x = x_j$ . Это является преимуществом по сравнению с методами, основанными на сетке по всей области интегрирования.

2. Не возникает проблем с аппроксимацией границы.
3. Вычисления проводятся с заранее заданной точностью. Допускаемая погрешность получается одновременно с решением.

Указанные преимущества позволяют успешно применять данный метод при решении задач вида (3.1).

Рассмотренный метод удобно применять, когда подынтегральная функция сильно изменяется вблизи границы.

Таблица 5.

$f(x, y)$	D	$\varepsilon$	$\varepsilon^*$	Приближённое значение	Кол-во слагаемых суммы (3.7)
$a^{x+y}$	$0 \leq x \leq 1$ $y$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	2,95241051	3
		$10^{-6}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	2,95249244	5
Точное решение				2,95249244	
$a^{x+y}$	$0 \leq \delta \leq 1$ , $\tilde{n}(\delta) = 0$ , $d(x) = 1 + x^2$	$10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	5,72959299	9
		$10^{-6}$	$10^{-9}$	5,72959299	11
$a^{x+y}$	$0 \leq \delta \leq 1$ , $\tilde{n}(\delta) = 0$ , $d(x) = \sqrt{1 - \delta^2}$	$10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	1,92244003	9
$\frac{2y}{(1+(x^2+y^2))^2}$	$0 \leq x \leq 1$ $y$	$10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	0,35052260	5
		$10^{-6}$	$10^{-8}$	0,35018829	9
$\frac{2y}{(1+(x^2+y^2))^2}$	$0 \leq x \leq 1$ , $c(x) = 0$ , $d(x) = 1 + x$	$10^{-3}$	$0,7 \cdot 10^{-4}$	0,48209462	5
		$10^{-6}$	$10^{-8}$	0,48309828	9
$\frac{2y}{(1+(x^2+y^2))^2}$	$0 \leq x \leq 1$ , $c(x) = 0$ , $d(x) = \sqrt{1 - \delta^2}$	$10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,28500371	5
		$10^{-6}$	$10^{-8}$	0,28539816	9
$\sin(x+y)$	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$	$10^{-5}$	$0,4 \cdot 10^{-5}$	1,00002922	5
$x^2 + y^2$	$0 \leq x \leq 1$ , $0 \leq y \leq 2x - 1$	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0,21875000	3
$\sqrt{x^2 + y^2} - 2x$ С переходом к полярной системе координат $\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \phi} + 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , $0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi$	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	3,55547525	9
		$10^{-4}$	$10^{-4}$	3,55547525	17

**4. Приближённое вычисление двойных интегралов с помощью многочленов  $G_0^f(x)$ .** Для решения задачи (3.1) можно применять метод, основанный на многочленах  $G_0^f(x)$ . Использование этого метода аналогично тому, как эти многочлены применялись для вычисления однократных интегралов, то есть, на разложении подынтегральной функции в ряд по последовательности функционалов  $\{M_n^f\}_{n=0}^\infty$ . Решение может быть получено следующим образом:

$$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy = \frac{d(x) - c(x)}{2} \left( G_0^f(x) + \sum_{s=0}^{\infty} M_s^f(x) \bar{\chi}_{s+2}^{-(0)} \right), \quad (4.1)$$

где 
$$\bar{\chi}_{s+2}^{-(0)} = \int_{-1}^{+1} \chi_{s+2}^{(0)}(y) dy,$$

$$M_s^f(x) = \frac{2}{s+3} \sum_{i=1}^{s+2} (-1)^i f(x, \bar{y}_i) (1 - \bar{y}_i^2),$$

$$\bar{y}_i = \frac{d(x) - c(x)}{2} y_i + \frac{d(x) + c(x)}{2}, \quad i = \overline{1, n+2}, \quad (4.2)$$

$$y_i = \cos \frac{i\pi}{s+3}, \quad G_0^f(x) = f(x, \bar{d}(x)) + f(x, \bar{c}(x)),$$

$$\bar{d}(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2} \cos \frac{2\pi}{s+3} + \frac{d(x) + c(x)}{2}.$$

При использовании обозначений

$$\Phi(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2} \left( G_0^f(x) + \sum_{s=0}^{\infty} M_s^f(x) \bar{\chi}_{s+2}^{-(0)} \right) \quad (4.3)$$

интеграл (3.1) вычисляется следующим образом:

$$I^G = \frac{b-a}{2} \left( G_0^\Phi + \sum_{r=0}^{\infty} M_r^\Phi \cdot \bar{\chi}_{r+2}^{-(0)} \right), \quad (4.4)$$

где 
$$G_0^\Phi = \Phi(\bar{a}) + \Phi(\bar{b}), \quad (4.5)$$

$$\bar{a} = \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{b+a}{2}, \quad \bar{b} = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{b+a}{2}, \quad (4.6)$$

$$M_r^\Phi = \frac{2}{r+3} \sum_{m=1}^{r+2} (-1)^m \Phi(\bar{x}_m) (1 - \bar{x}_m^2), \quad (4.7)$$

$$\bar{x}_m = \frac{b-a}{2} \cos \frac{m\pi}{r+3} + \frac{b+a}{2}, \quad m = \overline{1, r+2}. \quad (4.8)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Величина  $I^G$  (4.4) при  $r \rightarrow \infty$  стремится к значению интеграла (3.1) для всех областей  $D$ , ограниченных кривыми  $c(x)$  и  $d(x)$ , вторая производная которых удовлетворяет условию  $Lip \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  и, функций  $f(x, y)$  по обеим переменным принадлежащих классу, все вторые производные которых удовлетворяет условию  $Lip \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Доказательство** теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Этот метод удобно применять в тех случаях, когда подынтегральная функция сильно изменяется в центральной части области.

**5. Выводы.** Таким образом, предлагаемые квадратурные формулы (1.3), (1.7), (2.2), (2.7) позволяют вычислять определённый интеграл (1.1), с заданной точностью при минимальном

числе операций. При этом формулы (1.7) и (2.7) удобны тем, что вычисление каждого очередного члена соответствующих бесконечных рядов позволяет одновременно с приближенным значением интеграла получать погрешность. Подынтегральные функции удовлетворяют минимальным требованиям дифференцируемости (формула (1.7) –  $f(x) \in Lip \alpha$ , формула (2.7) –  $f''(x) \in Lip \alpha$ ), в отличие от всех используемых методов, где требуется существование производных высокого порядка.

При сравнении рассмотренных методов с другими следует отметить следующие особенности:

1. Методы (3.5) и (4.4) обеспечивают минимальное количество вычислений при подсчёте значений  $F(x_j)$ , так как значения  $y_i$  не объединены общей сеткой по всей области и скорость сходимости сумм в выражениях (3.3) и (4.2) зависит только от свойств функций в этих сечениях  $x = x_j$ .
2. Для обоих методов на подынтегральную функцию не накладываются условия существования производных высокого порядка.
3. Не возникает проблем с аппроксимацией границы.
4. Вычисления проводятся с заранее заданной точностью.
5. Допускаемая погрешность получается одновременно с решением.

Указанные преимущества позволяют успешно применять данные методы при решении задач (3.1).

Метод (3.5) удобно применять, когда подынтегральная функция сильно изменяется вблизи границы. Метод (4.4) – когда подынтегральная функция сильно изменяется в центральной части области.

Вычисления с использованием рассмотренных методов достаточно просто реализуются с помощью вычислительной техники.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В.И. *Приближённое вычисление интегралов*. М: Наука. – 1967.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Вычислительные методы высшего анализа*. М.–Л., Физматгиз. – 1962.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений*. т. 1. М: ФМ. – 1962.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики*. М: ФМ. – 1963.
5. Копченова Н.В., Марон И.А. *Вычислительная математика в примерах и задачах*. М: Лань. – 2008.
6. Этерман И.И. О решении двух задач прикладной математики с помощью специальных приближающих полиномов. *Известия вузов, Математика*. – 1964. – N 4(41). – С. 169–176.
7. Грибкова В.П., Козлов С.М. Равномерные приближения, основанные на полиномах Чебышева. *Сб. трудов XXIV международной конференции ММТТ–24*. Т.1. – 2011. – С. 31–36.