УДК 531.36, 532.595

ВЛИЯНИЕ СТРАТИФИКАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Антоньева Н.В., Кононов Ю.Н.

Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина

Получено частотное уравнение возмущенного движения волчка Лагранжа с цилиндрической полостью, частично заполненной двухслойной идеальной жидкостью. Проведено исследование собственных частот колебаний вращающейся двухслойной идеальной жидкости. Показано, что стратификация приводит к уменьшению собственных частот колебаний жидкости и появлению предельных частот. В предположении малости массы жидкости по сравнению с твердым телом разработан алгоритм исследования влияния стратификации жидкости на необходимое условие устойчивости равномерного вращения твердого тела.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стратификация, идеальная жидкость, устойчивость, вращение, волчок Лагранжа.

ВПЛИВ СТРАТИФІКАЦІЇ НА СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАНЬ ДЗИҐИ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

Антоньєва Н.В., Кононов Ю.М.

Отримано частотне рівняння збуреного руху дзиґи Лагранжа з циліндричною порожниною, яка частково заповнена двошаровою ідеальною рідиною. Проведено дослідження власних частот коливань двошарової ідеальної рідини, яка обертається. Показано, що стратифікація призводить до зменшення власних частот коливань рідини і появи граничних частот. У припущенні малості маси рідини в порівнянні з твердим тілом розроблено алгоритм дослідження впливу стратифікації рідини на необхідну умову стійкості рівномірного обертання твердого тіла.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Стратифікація, ідеальна рідина, стійкість, обертання, дзиґа Лагранжа.

INFLUENCE OF STRATIFICATION ON STABILITU OF ROTATIONS OF LAGRANGE SPINNING TOP WITH IDEAL LIQUID

Antonjeva N.V., Kononov Yu.N.

The frequency equation of perturbed motion of the Lagrange spinning top with a cylindrical cavity partially filled with an ideal bilayer liquid is obtained. The natural frequencies of oscillations of the rotating ideal bilayer liquid are studied. It is shown that the stratification leads to reduction of the natural oscillation frequencies of the liquid and the appearance of the limiting frequencies. In the assumption that the mass of the liquid is small in comparison with the solid body, the algorithm of study of the influence of stratification on the necessary condition for stability of uniform rotation of the rigid body.

KEY WORDS: Stratification, ideal fluid, stability, spin, Lagrange spinning top.

1. Введение. В результате физических, химических, биологических и других воздействий однородная жидкость может стратифицироваться, т. е. разделяться на слои различной плотности, что приводит к смещению центра масс жидкости, изменению моментов инерции и появлению внутренних поверхностных волн. Таким образом, движение твердого тела с однородной жидкостью (до стратификации) может быть устойчивым, а после стратификации стать неустойчивым. В качестве простейшего примера стратификации выбирается кусочно-постоянная плотностная стратификация.

В статье обобщены результаты работы [1] на случай двух идеальных несмешивающихся жидкостей. Как и в работах [1,2] относительно свободной поверхности однородной жидкости и [3] относительно внутренней поверхности, так и в данной работе относительно этих поверхностей предполагается, что в невозмущенном движении свободная поверхность и поверхность раздела жидкостей близки к цилиндрическим. Это можно считать вполне оправданным при достаточно большой величине угловой скорости вращения твердого тела.

2. Постановка задачи. Рассмотрим вращение вокруг неподвижной точки тяжелого осесимметричного волчка Лагранжа с цилиндрической полостью высотой $2c$ и диаметром основания $2a$. Полость частично заполнена двумя идеальными несмешивающимися жидкостями плотности ρ_1 и ρ_2 $(\rho_1 \le \rho_2)$. В невозмущенном движении волчок и жидкость совершают вращение вокруг вертикали как одно целое с угловой скоростью Ω, свободная поверхность и поверхность раздела жидкостей (внутренняя поверхность) полагаются цилиндрическими поверхностями соответственно радиуса b_1 и b. Исследуем влияние стратификации жидкости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа.

Линеаризованные уравнения возмущённого движения твердого тела имеют вид [1–3]

$$\begin{aligned} &A\ddot{\alpha} + C\Omega\dot{\beta} = -m_0 gd + M_X\cos\phi - M_Y\sin\phi, \\ &A\ddot{\beta} + C\Omega\dot{\alpha} = -m_0 gd + M_X\sin\phi + M_Y\cos\phi. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь A, C – главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки *O*; m_0 – масса твердого тела; α, β, ϕ – углы Эйлера – Крылова; d – расстояние от неподвижной точки до центра масс твердого тела; $OXYZ$ – система координат, жестко связанная с твердым телом; OZ – ось симметрии твердого тела и полости; M_X, M_Y – проекции на оси $OXYZ$ момента, действующего на твердое тело со стороны жидкости.

Линеаризованные уравнения движения и граничные условия для жидкости будем записывать в системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а оси Ox и Oy вращаются вокруг оси Oz с угловой скоростью Ω [1,3–4]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - 2\Omega v_i = -\frac{\partial P_i}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2\Omega u_i = -\frac{\partial P_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial P_i}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0$$

$$w_i = -(\dot{l}x + \dot{m}y) \text{ при } z = c \pm h$$

$$u_2 x + v_2 y = z(\dot{l}x + \dot{m}y) \text{ при } x^2 + y^2 = a^2$$

$$[\frac{\partial P_1}{\partial t} + \Omega^2(u_1 x + v_1 y) - gw_1] = 0 \text{ при } x^2 + y^2 = b_1^2$$

$$\rho_1[\frac{\partial P_1}{\partial t} + \Omega^2(u_1 x + v_1 y) - gw_1] =$$

$$= \rho_2[\frac{\partial P_2}{\partial t} + \Omega^2(u_2 x + v_2 y) - gw_2] \text{ при } x^2 + y^2 = b^2$$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_2 = \bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2 \text{ при } x^2 + y^2 = b^2,$$

где l, m, n – направляющие косинусы оси симметрии полости и твердого тела по отношению к осям $Oxyz$; $\bar{v}_i = (u_i, v_i, w_i)$; h – расстояние от неподвижной точки до центра масс жидкости; $\bar{n}_2$ – нормаль к поверхности раздела жидкостей (для определенности нормаль считается внешней по отношению к области, занимаемой жидкостью с плотностью ρ_1); p_i – давление в *i*-ой жидкости; $p_i = \rho_i[P_i + (x^2 + y^2)\Omega^2/2]$; $(i = 1, 2)$.

3. Построение решения задачи. Для изучения устойчивости невозмущенного движения полагаем, что все функции, содержащие время, можно представить в виде $u(x,y,z,t) = u_s(x,y,z)e^{st}$. После перехода к новым функциям $Q_{is} = P_{is} - s^2(l_s x + m_s y)z$ и цилиндрическим координатам z, r, θ, получаем задачу для определения Q_{is}

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 Q_{is}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Q_{is}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_{is}}{\partial r} = \alpha^2 \frac{\partial Q_{is}}{\partial z^2}, \\ &\frac{\partial Q_{is}}{\partial z} = 0, \qquad z = h \pm c, \\ &sa\frac{\partial Q_{2s}}{\partial r} + 2\Omega\frac{Q_{2s}}{\partial \theta} = 2azs[\Omega^2 s(l_s\sin\theta - m_s\cos\theta) - \\ &-(s^2 + 2\Omega^2)(l_s\cos\theta + m_s\sin\theta)], \quad r = a. \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &s(\rho_1 Q_{1s} - \rho_2 Q_{2s}) + \Omega^2 b[(\rho_1 u_{1s} - \rho_2 ui)\cos\theta + \\ &+(\rho_1 v_{1s} - \rho_2 v_{2s})\sin\theta] + g(\rho_2 w_{2s} - \rho_1 w_{1s}) = \\ &= \Delta\rho s^3 zb(l_s\cos\theta + m_s\sin\theta), \quad r = b, \\ &u_{1s}\cos\theta + v_{1s}\sin\theta = u_{2s}\cos\theta + v_{2s}\sin\theta, \ r = b, \\ &sQ_{1s} + \Omega^2 b_1[u_{1s}\cos\theta + v_{1s}\sin\theta] - gw_{1s} = \\ &= s^3 b_1(l_s\cos\theta + m_s\sin\theta), \quad r = b_1. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $\alpha^2 = -(s^2 + 4\Omega^2)/s^2$, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$.

Представим решение задачи (2)–(3) в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} Q_{is} = \sum_k C_k[A_{ik}(r)\cos\theta + B_{ik}(r)\sin\theta] \times \\ \times \cos k(z - h + c) \end{aligned} \qquad (4)$$

и разложим функцию $f(z) = z$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $c - h \le z \le c + h$

$$\begin{aligned} z &= h - \frac{8c}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}\cos k(z - c + h) = \\ &= \sum_k C_k \cos k(z - c + h), \end{aligned} \qquad (5)$$

где $C_k = -2/ck^2$ $(k \neq 0)$, $C_0 = h$ $(k = 0)$;
$k = \pi(2j+1)/2c$,

$$(A_{ik} + iB_{ik}) = (l_s + im_s) \times$$
$$\times \begin{cases} X_{ik}J_1(\alpha kr) + Z_{ik}Y_1(\alpha kr), k \neq 0, \\ X_{i0}r + Z_{i0}/r, k = 0, \end{cases}$$

J_1 и Y_1 – функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Имеются иные решения уравнения (2), описывающие колебания жидкости, но ни одно из этих колебаний не может создать момента, действующего со стороны жидкости на оболочку волчка [1,2].

Подставляя (4) и (5) в граничные условия (3), получим

$$(sa\frac{d}{dr} - 2i\Omega)(A_{2k} + iB_{2k}) =$$
$$-2as(s+i\Omega)(s-2i\Omega)(l_s + im_s), \quad r = a$$
$$[\Omega^2(sb\frac{d}{dr} - 2i\Omega) - s(s^2 + 4\Omega^2)] \times$$
$$\times[\rho_2(A_{2k} + iB_{2k}) - \rho_1(A_{1k} + iB_{1k})] =$$
$$= \Delta\rho s^2 b(s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2(l_s + im_s), \quad r = b, \qquad (6)$$
$$(sb\frac{d}{dr} - 2i\Omega)(A_{1k} + iB_{1k}) =$$
$$= (sb\frac{d}{dr} - 2i\Omega)(A_{2k} + iB_{2k}), \quad r = b,$$
$$[\Omega^2(sb_1\frac{d}{dr} - 2i\Omega) - s(s^2 + 4\Omega^2)](A_{1k} + iB_{1k}) =$$
$$= s^2 b_1(s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2(l_s + im_s), \quad r = b_1.$$

Вначале рассмотрим случай k = 0.

Из граничных условий (6) получим систему уравнений для определения неизвестных X_{10}, X_{20} и Z_{10}, Z_{20}

$$\begin{cases} (s-2i\Omega)X_{20} - (s+2i\Omega)Z_{20}/a^2 = -2s(s+i\Omega)(s-2i\Omega), \\ (s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2(\rho_1 X_{10} - \rho_2 X_{20}) + \\ +(s+2i\Omega)(s^2 - 2i\Omega + \Omega^2)Z_{10}\rho_1/b^2 - \\ -\rho_2(s+2i\Omega)(s^2 - 2i\Omega + \Omega^2)Z_{20}/b^2 = \Delta\rho s^2(s-2i\Omega)\times \\ \qquad \times(s+i\Omega)^2, \qquad (7) \\ (s-2i\Omega)X_{10} - (s-2i\Omega)X_{20} - (s+2i\Omega)Z_{10}/b^2 + \\ +(s+2i\Omega)Z_{20}/b^2 = 0, \\ (s+2i\Omega)(s^2 - 2i\Omega + \Omega^2)Z_{10}/b_1^2 + \\ +(s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2 X_{10} = -s^2(s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2. \end{cases}$$

Решение линейной системы (7) имеет вид:

$$Z_{10} = \frac{2s^3 s_1^2}{\Delta_0}(s - 2I\Omega)a^2 b^2 b_1^2 \rho_2,$$
$$Z_{20} = -\frac{ss_1}{\Delta_0}(s - 2I\Omega)\left[\tilde{s}(b^2 - b_1^2)\rho_1 + \left(\tilde{s}b^2 + s_1^2 b_1^2\right)\rho_2\right]a^2 b^2,$$
$$X_{10} = -\frac{s^2 s_1}{\Delta_0}\Big(s_1\tilde{s}\left(a^2 - b^2\right)(b^2 - b_1^2)\rho_1 +$$
$$+\left[\tilde{s}\left(3s - I\Omega_0\right)a^2b^2 + s_1\tilde{s}b^4 + s_1\left(s_1^2b^2 + \tilde{s}a^2\right)b_1^2\right]\rho_2\Big)$$
$$X_{20} = -\frac{ss_1}{\Delta_0}\Big(s_1\tilde{s}\left(2s_1a^2 - sb^2\right)(b^2 - b_1^2)\rho_1 +$$
$$+\left(2\tilde{s}a^2 + s_1sb^2\right) + \left(\tilde{s}b^2 + s_1^2b_1^2\right)\rho_2\Big),$$

где

$$\Delta_0 = s_1^2\tilde{s}(a^2 - b^2)(b^2 - b_1^2)\rho_1 + (\tilde{s}a^2 + s_1^2b^2) + (\tilde{s}b^2 + s_1^2b_1^2)\rho_2$$
$$s_1 = s + i\Omega, \quad \tilde{s} = s^2 - 2is\Omega + \Omega^2.$$

Далее рассмотрим общий случай, когда $k \neq 0$.

Из граничных условий (6), получим линейную систему относительно неизвестных X_{1k}, X_{2k}, Z_{1k} и Z_{2k}

$$\begin{cases} J_a X_{2k} + Y_a Z_{2k} = \tilde{b}_1 \\ \tilde{J}_b X_{1k} + J_{b_1}X_{2k} + Y_{b_1}Z_{2k} + \tilde{Y}_b Z_{1k} = \tilde{b}_2 \\ J_b X_{1k} - J_b X_{2k} - Y_b Z_{2k} + Y_b Z_{1k} = 0 \\ \tilde{J}_{b_1}X_{1k} + \tilde{Y}_{b_1}Z_{1k} = \tilde{b}_4. \end{cases} \qquad (8)$$

Здесь

$$J(r) = \alpha skrJ_0(\alpha kr) - (s + 2i\Omega)J_1(\alpha kr),$$
$$Y(r) = \alpha skrY_0(\alpha kr) - (s + 2i\Omega)Y_1(\alpha kr),$$
$$J_a = J(a), \; J_b = J(b), \; Y_a = Y(a), \; Y_b = Y(b),$$
$$s^* = s(s^2 + 4\Omega^2),$$
$$\tilde{J}(r) = \Omega^2 J(r) - sJ_1(\alpha kr), \; \tilde{Y}(r) = \Omega^2 Y(r) - sY_1(\alpha kr),$$
$$\tilde{J}_{b_1} = \tilde{J}(b_1), \qquad \tilde{Y}_{b_1} = \tilde{Y}(b_1),$$
$$\tilde{b}_1 = -2as(s+i\Omega)(s-2i\Omega),$$
$$\tilde{b}_2 = \Delta\rho s^2 b(s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2,$$
$$\tilde{b}_4 = b_1 s^2(s-2i\Omega)(s+i\Omega)^2,$$
$$J_{b_1} = -\rho_2 s^* J_1(\alpha kb), \; Y_{b_1} = -\rho_2 s^* Y_1(\alpha kb),$$
$$\tilde{J}_b = \Delta\rho\Omega_0^2 J_b + s^*\rho_1 J_1(\alpha kb),$$
$$\tilde{Y}_b = \Delta\rho\Omega_0^2 Y_b + s^*\rho_1 Y_1(\alpha kb).$$

Решение линейной системы (8) имеет вид:

$$X_{1k} = \frac{1}{\Delta}\Big(\left(-Y_a J_b \tilde{b}_2 + \tilde{b}_1 J_b Y_{b_1} - Y_b J_{b_1}\tilde{b}_1 + Y_b J_a \tilde{b}_2\right)\tilde{Y}_{b_1} -$$
$$-\tilde{b}_4 Y_b\left(J_a Y_{b_1} + J_{b_1}Y_a - J_a\tilde{Y}_b\right) + J_b Y_a \tilde{Y}_b \tilde{b}_4\Big),$$
$$X_{2k} = \frac{1}{\Delta}\Big(\tilde{b}_4\left(Y_a\tilde{Y}_b J_b - Y_a\tilde{J}_b Y_b\right) + \tilde{b}_2 Y_a\left(Y_b\tilde{J}_{b_1} - \tilde{Y}_{b_1}J_b\right) -$$
$$-\tilde{b}_1\tilde{J}_{b_1}\left(Y_b Y_{b_1} + \tilde{Y}_b Y_b\right) + \tilde{b}_1\tilde{Y}_{b_1}\left(J_b Y_{1b} + \tilde{J}_b Y_b\right)\Big),$$
$$Z_{1k} = -\frac{1}{\Delta}\Big(\tilde{b}_4\left(Y_a\tilde{J}_b J_b + Y_a J_{b_1}J_b - J_a Y_{b_1}J_b - Y_b\tilde{J}_b J_a\right) +$$
$$+\tilde{J}_{b_1}\left(-J_b Y_a\tilde{b}_2 + J_b Y_{b_1}\tilde{b}_1 - Y_b J_{b_1}\tilde{b}_1 + Y_b J_a\tilde{b}_2\right)\Big),$$

$$Z_{2k} = -\frac{1}{\Delta}\Big(\tilde{J}_{b_1}\tilde{b}_1\left(-Y_b J_{b_1} - \tilde{Y}_b J_b\right) + \tilde{b}_4 J_a\left(\tilde{Y}_b J_b - Y_b \tilde{J}_b\right) -$$
$$+\tilde{b}_1 \tilde{Y}_{b_1}\left(\tilde{J}_b J_b + J_b J_{b_1}\right) + \tilde{b}_2 J_a\left(Y_b \tilde{J}_{b_1} - J_b \tilde{Y}_{b_1}\right)\Big),$$

где

$$\Delta = \tilde{J}_{b_1}\left(-Y_b J_a Y_{b_1} + Y_b J_{b_1} Y_a + \tilde{Y}_b J_b Y_a - \tilde{Y}_b J_a Y_b\right) +$$
$$+\tilde{Y}_{b_1}\left(J_b J_a Y_{b_1} - J_b J_{b_1} Y_a - \tilde{J}_b J_b Y_a + \tilde{J}_b J_a Y_b\right).$$

В дальнейшем нам понадобятся корни уравнения

$$\Delta = 0\,. \tag{9}$$

Следует отметить, что корни этого уравнения описывают собственные частоты колебания равномерно вращающейся двухслойной идеальной жидкости. Подробные исследования этого уравнения для $b_1 = 0$ даны в работе [5].

По аналогии с работами [1,2] проведем вычисления моментов M_X, M_Y и с учетом уравнения движения твердого тела (1) получим следующее частотное уравнение

$$A\tau^2 - C\tau + \frac{C^2}{4A}\beta = \frac{\pi h}{\Omega^2}\left\{2d^2\rho_2 a\left(X_{20}a + \frac{Z_{20}}{a}\right) + \right.$$
$$+\Omega^2\tau(\tau-2)\left[\frac{2}{3}a^2\left(3d^2+h^2\right)\rho_2 - \frac{1}{2}\left(\rho_1\left(b^4 - b_1^4\right) + \right.\right. \tag{10}$$
$$\left.\left. +\rho_2\left(a^4 - b^4\right)\right)\right] - \sum_j^{\infty} C_k^2 \sum_{i=1}^{2}\left(\tilde{J}_{ik}X_{ik} + \tilde{Y}_{ik}Z_{ik}\right)\Bigg\},$$

где

$$\beta = 4m_0 gdA / C^2\Omega^2,\ s = i(\tau-1)\Omega\,,$$
$$\tilde{J}_{1k} = \rho_1 \tilde{s} J_{1k}\,, \tilde{s} = s^2/(s^2 + 4\Omega^2)\,,$$
$$J_{1k} = 2[bJ_1(\alpha kb) - b_1 J_1(\alpha kb_1)] -$$
$$-\alpha k[b^2 J_0(\alpha kb) - b_1^2 J_0(\alpha kb_1)],$$
$$\tilde{J}_{2k} = \rho_2[aJ_1(\alpha ka) + \tilde{s}J_{2k}]\,,$$
$$\tilde{Y}_{2k} = \rho_2[aY_1(\alpha ka) + \tilde{s}Y_{2k}]\,,$$
$$J_{2k} = 2[aJ_1(\alpha ka) - bJ_1(\alpha kb)] -$$
$$-\alpha k[a^2 J_0(\alpha ka) - b^2 J_0(\alpha kb)],$$
$$Y_{2k} = 2[aY_1(\alpha ka) - bY_1(\alpha kb)] -$$
$$-\alpha k[a^2 Y_0(\alpha ka) - b^2 Y_0(\alpha kb)],$$
$$Y_{1k} = 2[bY_1(\alpha kb) - b_1 Y_1(\alpha kb_1)] -$$
$$-\alpha k[b^2 Y_0(\alpha kb) - b_1^2 Y_0(\alpha kb_1)].$$

Таким образом, выведено частотное уравнение малых колебаний равномерно вращающегося волчка Лагранжа с цилиндрической полостью, частично заполненной двухслойной идеальной жидкостью. Спектр частот описывается множеством действительных корней этого уравнения. Необходимое условие устойчивости равномерного вращения волчка со стратифицированной жидкостью состоит в требовании, чтобы все корни уравнения (10) были действительными. При $\rho_1 = 0$ уравнение (10) совпадает с уравнением из работы [1], а при $b_1 = 0$ с уравнением работы [3].

Следует отметить, что уравнение (10) является довольно сложным для аналитического исследования. По аналогии с работами [1–3] будем предполагать, что масса жидкости мала по сравнению с массой твердого тела. В этом случае правая часть уравнения (10) мала всюду за исключением окрестности полюсов, то есть корней уравнения (9).

Если корень уравнения (10) не является близким к полюсу правой части этого уравнения, то правой частью можно пренебречь и записать решение в виде

$$\tau_{pr} = \frac{C}{2A}(1 - \sqrt{1-\beta})\,, \tau_{nu} = \frac{C}{2A}(1 + \sqrt{1-\beta})\,.$$

Следовательно, волчок неустойчив, если

$$\beta > 1\ \ (\Omega^2 < 4m_0 gdA / C^2)\,.$$

Предположим, что корень уравнения (10) лежит вблизи полюса $\tau = \tau_0$. В окрестности τ_0 это уравнение можно представить следующим образом

$$A\tau^2 - C\tau + \frac{C^2}{4A}\beta = \frac{D(\tau_0)}{\tau - \tau_0}\,.$$

Здесь $D(\tau_0)$ – известный малый параметр (вычет в полюсе τ_0).

По аналогии с работами [1,2] можно показать, что при $\beta < 1$ волчок неустойчив, когда $D < 0$ и

$$|\tau_0 - \tau_{nu}| \le 2\sqrt{\frac{-D(\tau_0)}{C\sqrt{1-\beta}}}\,. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует, что опасность потери устойчивости имеется всегда, когда одна из собственных частот колебаний стратифицированной жидкости близка к нутации твердого тела ($\tau_{nu} \to \tau_0$). Бесконечному числу собственных колебаний соответствует бесконечно много областей неустойчивости. Однако, практическое значение могут иметь лишь несколько областей, так как вязкость жидкости сводит на нет области неустойчивости для собственных частот более высокого порядка [1].

Были проведены численные исследования уравнения (9) для постоянной массы жидкости ($\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2 + \left(\tilde{b}^2 - \tilde{b}_1^2\right)\rho_{12} = \mathrm{const}$) и различных $\tilde{c}, \tilde{b}, \tilde{b}_1$ и ρ_{12} ($\tilde{c} = c/a$, $\tilde{b} = b/a$, $\tilde{b}_1 = b_1/a$, $\rho_{12} = \rho_1/\rho_2$, $0 \le \tilde{b} \le \tilde{b}_1 \le 1$, $0 \le \rho_{12} \le 1$). На основании проведенных исследований показано, что если в однородной вращающейся жидкости произошла кусочно-постоянная по плотности стратификация, то это приводит к уменьшению собственных частот колебаний жидкости. Появление в полностью заполненном цилиндре произвольной высоты внутренней поверхности с бесконечно малым радиусом приводит к появлению предельной частоты $\Omega\Big/\left(1 + \sqrt{2\rho_2/\Delta\rho}\right)$.

Предварительные численные вычисления показали, что при малых $\tilde{b}-\tilde{b}_1$ и ρ_{12} полюса τ_0 не представляют большого интереса, если $\tau_0 < 0$ или $\tau_0 > 0.20$. Для $0 \le \tau_0 \le 0.2$ величина вычета $D(\tau_0) < 0$.

В качестве примера в табл. 1, 2 и 3 для $\rho_{12} = 0.02$, 0.2, 0.4 и $\tilde{b}^2 = 0.2$, $\tilde{b}_1 = 0$ приведены значения полюсов τ_0 и величины $\dfrac{c}{a(2j+1)}$.

Следовательно, при малых ρ_{12} и $\tilde{b}_1$ влиянием стратификации на устойчивость движения твердого тела можно пренебрегать.

Из табл. 1–3 следуют следующие интервалы неустойчивости для $c/(a(2j+1))$:

$(1.066;\ 0.948) \cup (0.502;\ 0.447) \cup \ldots$ ($\rho_{12} = 0.02$),

$(1.075;\ 0.957) \cup (0.517;\ 0.458) \cup \ldots$ ($\rho_{12} = 0.2$),

$(1.087;\ 0.967) \cup (0.527;\ 0.465) \cup \ldots$ ($\rho_{12} = 0.4$).

Таблица 1. Результаты численных расчетов при $\rho_{12} = 0.02$

τ_0	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$
0	0.948	0.447	0.385
0.02	0.970	0.457	0.394
0.04	0.992	0.468	0.405
0.06	1.016	0.479	0.415
0.08	1.040	0.490	0.427
0.1	1.066	0.502	0.438

Таблица 2. Результаты численных расчетов при $\rho_{12} = 0.2$

τ_0	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$
0	0.957	0.458	0.364
0.02	0.979	0.469	0.373
0.04	1.002	0.480	0.382
0.06	1.025	0.492	0.392
0.08	1.050	0.504	0.403
0.1	1.075	0.517	0.413

Таблица 3. Результаты численных расчетов при $\rho_{12} = 0.4$

τ_0	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$	$c/(a(2j+1))$
0	0.967	0.465	0.346
0.02	0.989	0.477	0.355
0.04	1.01	0.489	0.364
0.06	1.036	0.501	0.373
0.08	1.061	0.514	0.383
0.1	1.087	0.527	0.393

Табл. 1 ($\rho_{12} = 0.02$) с точностью до 10^{-3} совпадает с табл. 2 [1]. Следовательно, если $\tau_{nu} \to \tau_0$, то начиная с некоторого Ω^0 для любого $\Omega > \Omega^0$ условие неустойчивости (11) выполнено и уравнение (10) будет иметь пару комплексно-сопряженных корней.

4. Выводы. Получено частотное уравнение возмущенного движения волчка Лагранжа с цилиндрической полостью, частично заполненной двухслойной идеальной жидкостью. Проведено исследование собственных частот колебаний вращающейся двухслойной идеальной жидкости. Показано, что стратификация приводит к уменьшению собственных частот колебаний жидкости и появлению предельных частот. В предположении малости массы жидкости по сравнению с твердым телом разработан алгоритм исследования влияния стратификации жидкости на необходимое условие устойчивости равномерного вращения твердого тела. Показано, что влиянием стратификации на устойчивость вращения твердого тела можно пренебрегать при $\rho_{12} < 0.1$ и $\tilde{b}, \tilde{b}_1 < 0.05$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson By.K. On the stability of a spinning top containing liquid. *J. Fluid Mech*. – 1959. – v. 5, Pt. 4. – P.575–592.
2. Куликов В.П., Самсонов В.А. О малых колебаниях около тривиального вращения на струне твердого тела с полостью, частично заполненной жикостью. *МТТ*. – 1985. – N4. – С. 33–37.
3. Кононов Ю.Н., Дрынь С.В. О колебаниях и устойчивости вращения твердого тела, содержащего двухслойную стратифицированную жидкость. *Изв. Высш. учеб. заведений. Северо-Кавказский регион. Матем. моделирование. Естеств. науки. Спец. выпуск*. – 2001. – С.102–104.
4. Кононов Ю.Н., Шулдякова Н.В. Об устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с полостью, частично заполненной двухслойной идеальной жидкостью. *In: Book of abstracts of 10th International Conference «Stability, Control and rigid bodies dynamics»*, Donetsk (Ukraine). – 2008. – С.53–54.
5. Kononov Yu.N., Chen Men-shi. Free oscillation of a rotating ideal stratified liquids. *J. of Sichuan University. Engineering Science Edition*.–2001. – v.33, N 5– С.112–115.